

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP HỒ CHÍ MINH
HỘI NGHỊ KHOA HỌC LẦN 10 & 23/10/2007
PHÂN BAN CƠ CHẤT LƯU-KỸ THUẬT TÀI NGUYÊN NƯỚC-CÔNG TRÌNH CẢNG

**MÔ HÌNH SÓNG TRONG TRƯỜNG HỢP
CÓ CÔNG TRÌNH BIỂN VÀ VÙNG SÓNG VỖ
A WAVE MODEL IN THE PRESENCE OF
COASTAL STRUCTURES AND THE SURF ZONE**

&

*T.S. Trương Ngọc Tường,
Giảng viên, BM Cảng & Công Trình Biển, ĐH Bách Khoa TP Hồ Chí Minh
Kỹ sư trưởng, Công Ty Cổ Phần Tư Vấn TK Cảng-KT Biển*

Tóm tắt

Một mô hình sóng dạng parabolic theo thời gian đã được tác giả phát triển từ mô hình sóng tuyến tính có độ dốc nhỏ dạng elliptic có bao gồm số hạng tổn thất. Với cách xử lý biên hợp lý, mô hình này có thể mô phỏng sự lan truyền sóng tổng hợp khúc xạ-nhiều xạ-phản xạ trong trường hợp có góc sóng tới rộng và sóng phản xạ tác động đến biên hờ với khối lượng tính toán nhỏ. Mô hình đã được kiểm chứng với nhiều thí nghiệm với kết quả rất phù hợp.

Abstract

A time dependent parabolic model is developed from the elliptic mild slope equation including a dissipation term. The reasonable treatment of the boundary conditions gives the model the ability to simulate the wave transformation in cases where oblique incident waves exist and reflected waves are imposed on open boundaries. This model can be applied to compute the combined refracted-diffracted-reflected waves for irregular bathymetry, arbitrary shapes of coastal structures and large oblique incident waves with relatively small computational effort. The model is verified with several relevant data and the results show good agreement

1. Mở đầu

Phương trình sóng độ dốc đáy nhỏ (elliptic mild slope equation) Berkhoff (1972):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \right) + \frac{\omega^2 C_g}{C} \emptyset = 0 \quad \text{khúc xạ-nhiều xạ-phản xạ, lưới mịn, khối lượng tính toán lớn}$$

- **Mô hình parabolic:** loại bỏ phản xạ, khối lượng tính toán nhỏ

Radder (1979)
$$\frac{\partial \emptyset}{\partial x} = \left(ik - \frac{1}{2kCC_g} \frac{\partial(kCC_g)}{\partial x} + \frac{i}{2kCC_g} \frac{\partial}{\partial y} CC_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \emptyset$$

Ebersole et al. (1986) (RCPWAVE model)
$$\frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{CC_g} (\nabla a \cdot \nabla (CC_g)) + k^2 - |\nabla S|^2 \right\} = 0$$

Kirby (1986)
$$2ikA_x + A_{yy} + \frac{k}{C_g} \frac{\partial C_g}{\partial k} A_{xx} - \frac{ik}{C_g} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{C_g}{k} \right) A_{xyy} - \frac{1}{4C_g} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{C_g}{k} \right) A_{yyyy} = 0$$

Isobe (1986)
$$\frac{1}{Gh_\xi} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[G \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial \emptyset}{\partial \eta} \right] + 2ik \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \emptyset}{\partial \xi} + \left\{ \frac{i}{Gh_\eta} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (kGh_\eta) + 2k^2 \right\} \emptyset = 0$$

Li (1994)
$$-2\omega i \frac{\partial \emptyset}{\partial t} = \nabla \cdot (CC_g \nabla \emptyset) + (k^2 CC_g) \emptyset \quad \text{kể cả phản xạ, chưa xét tổn thất}$$

- **Mô hình hyperbolic:** tương tự mô hình dòng chảy, xử lý biên phức tạp, lưới mịn, tính toán lớn

Ito and Tanimoto (1972)
$$\frac{\partial u_o}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_o}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{k} \operatorname{tanh} kh \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{\partial v_o}{\partial y} \right)$$

Copeland (1985)
$$\nabla Q + \frac{C_g}{C} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C C_g \nabla \eta = 0$$

Watanabe and Maruyama (1986)
$$\frac{\partial Q_x}{\partial t} + \frac{1}{n} C^2 \frac{\partial(m\eta)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Q_y}{\partial t} + \frac{1}{n} C^2 \frac{\partial(m\eta)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

Madsen and Larsen (1987)
$$\lambda_1 \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda_2 S + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = SS \quad \lambda_3 \frac{\partial P}{\partial t} + \lambda_4 P + C_g^2 \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$\lambda_3 \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda_4 Q + C_g^2 \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

Yoo et al. (1989)
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[1 + \frac{k_i U_i}{\sigma_o} \right] \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (n R_i) = 0 \quad \frac{\partial R_i}{\partial t} + \left[1 + \frac{k_i U_i}{\sigma_o} \right] C^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + F \hat{R} |R_i = 0$$

- **Mô hình elliptic:** xử lý biên phức tạp khi góc sóng tới lớn, lưới mịn, tính toán lớn

Hurdle et al. (1989)
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[-CC_g \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] - 2i\omega U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \left(\omega_r^2 - \omega^2 - k^2 CC_g - i\omega \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) \phi = i\omega_r f_D \phi$$

Sato et al. (1990)
$$\nabla^2 \phi + k^2 \left(1 + i \frac{f_D}{n\omega} \right) \phi = 0$$

Yu et al. (1992)
$$(CC_g \hat{\eta}_x)_x + (CC_g \hat{\eta}_y)_y + (1 + i f_D) n\omega^2 \hat{\eta} = 0$$

- **Các mô hình sóng không đều, ngẫu nhiên.....**

2. Phương trình cơ bản

Phương trình sóng Booij (1981): $\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + (k^2 CC_g + i\omega f_D) \Phi = 0$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + (\omega^2 - k^2 CC_g - i\omega f_D) \Phi = 0$$

Kirby và Dalrymple (1994) $f_{Df} = \frac{2\omega k f_1 |A| (1-i)}{3\pi \sinh 2kh \sinh kh}$ $f_{Db} = \frac{K.C_g \left[1 - \left(\frac{\gamma h}{H} \right)^2 \right]}{h}$

Với $\Phi(x, y, t) = \varnothing(x, y) e^{-i\omega t} = \varnothing(x, y, \bar{t}) e^{-i\omega \bar{t}}$, biến đổi $\bar{t} = \epsilon t$ và $\phi = \varnothing \sqrt{CC_g}$

Truong (1999) đã chứng minh $-\frac{2i\omega}{CC_g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - i\omega f_D \frac{\phi}{CC_g} = \nabla^2 \phi - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}} \cdot \phi + k^2 \phi$

hay $\boxed{-\frac{2i\omega}{CC_g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{i\omega f_D}{CC_g} \phi = \nabla^2 \phi + k_c^2 \phi}$ với $k_c^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}}$

Phương trình sóng dạng parabolic theo thời gian trên có thể mô phỏng sự biến đổi sóng khúc xạ-nhiều xạ-phản xạ và sóng vỡ.

3. Điều kiện biên

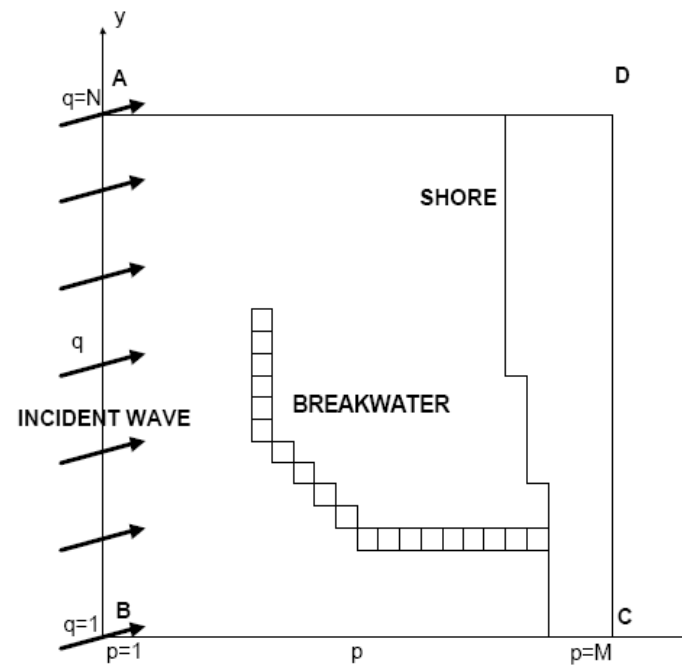
Đọc theo biên phía biển AB, với k_x và k_y là hệ số sóng theo phương x và y , điều kiện biên có xét đến sóng phản xạ là:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = i k_x (\phi_{\text{inc}} - \phi_{\text{ref}}) = i k_x (\phi_{\text{inc}} - (\phi - \phi_{\text{inc}})) = i k_x (2\phi_{\text{inc}} - \phi)$$

Trong đó ϕ_{inc} là thế sóng tới, ϕ_{ref} là thế sóng phản xạ.

Đối với biên trên AD và biên dưới BC (biên ngang), điều kiện biên có kể đến sóng phản xạ giới thiệu bởi Behrendt

(1985) được sử dụng:
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = i k_y \phi$$



Hình 1 Định nghĩa vùng tính toán

Tại vị trí bờ và công trình biển, sử dụng điều kiện biên có xét đến sóng phản xạ do Behrendt (1985) thiết lập:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -i k \alpha \phi \quad \text{trong đó} \quad \alpha = \frac{1 - K_r}{1 + K_r}$$

4. Phương pháp số

Mô hình đề xuất là mô hình sóng parabolic biến đổi theo thời gian. Biến thời gian ở đây được xem như là tham số lặp và chỉ ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ của mô hình (Li, 1994). Thế vận tốc là biến duy nhất của mô hình.

Sơ đồ sai phân luân hướng ẩn (Alternating Direction Implicit-ADI)

Đối với hướng x, ở bước thời gian $n+1/2$

$$\left[-\frac{1}{\Delta x^2} \right] \phi_{p-1,q}^{n+1/2} + \left[\frac{2f_{p,q}i}{\Delta t} + \frac{1}{2} d_{p,q}i + \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} (k_c)_{p,q}^2 \right] \phi_{p,q}^{n+1/2} + \left[-\frac{1}{\Delta x^2} \right] \phi_{p+1,q}^{n+1/2} =$$

$$\frac{1}{\Delta y^2} \phi_{p,q-1}^n + \left[\frac{2f_{p,q}i}{\Delta t} - \frac{1}{2} d_{p,q}i - \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{1}{2} (k_c)_{p,q}^2 \right] \phi_{p,q}^n + \frac{1}{\Delta y^2} \phi_{p,q+1}^n$$

Đối với hướng y, ở bước thời gian $n+1$

$$\left[-\frac{1}{\Delta y^2} \right] \phi_{p,q-1}^{n+1} + \left[\frac{2f_{p,q}i}{\Delta t} + \frac{1}{2} d_{p,q}i + \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{1}{2} (k_c)_{p,q}^2 \right] \phi_{p,q}^{n+1} + \left[-\frac{1}{\Delta y^2} \right] \phi_{p,q+1}^{n+1} =$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} \phi_{p-1,q}^{n+1/2} + \left[\frac{2f_{p,q}i}{\Delta t} - \frac{1}{2} d_{p,q}i - \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} (k_c)_{p,q}^2 \right] \phi_{p,q}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta x^2} \phi_{p+1,q}^{n+1/2}$$

Trong mỗi hướng, một hệ thống ma trận băng ba được tạo lập và giải nhanh chóng.

Tiến trình giải được lặp cho đến khi nào giá trị chênh lệch

$$\Delta = \frac{\sqrt{\sum \sum \text{ABS}(\phi_{p,q}^n - \phi_{p,q}^{n-1})^2}}{\sum \sum \text{ABS}(\phi_{p,q}^n)} \quad \text{nhỏ hơn giá trị qui định.}$$

Đối với biên bên $\frac{\varnothing_{2,q} - \varnothing_{1,q}}{\Delta x} = i k_x (2\varnothing_{inc,q} - \varnothing_{1,q})$ hay $\varnothing_{1,q} = \frac{\varnothing_{2,q} - 2i k_x \Delta x \varnothing_{inc,q}}{1 - i k_x \Delta x}$

Đối với biên ngang $\varnothing_{p,N} = \varnothing_{p,N-1} \frac{\left(1 + \frac{i k_y \Delta y}{2}\right)}{\left(1 - \frac{i k_y \Delta y}{2}\right)}$

trong đó $k_y = -i \frac{\partial \varnothing}{\partial y} = \frac{-2i}{\Delta y} \frac{[\varnothing_{p,N} - \varnothing_{p,N-1}]}{\varnothing_{p,N} + \varnothing_{p,N-1}}$ xác định từ thời điểm tính trước

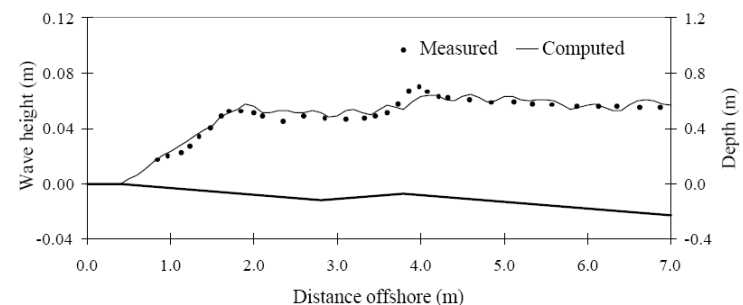
Đối với biên bờ và công trình, điều kiện biên theo hướng x : $-\left(1 + \frac{1}{2} \Gamma_{p-1,q} \Delta x\right) \varnothing_{p-1,j} + \left(1 - \frac{1}{2} \Gamma_{p,q} \Delta x\right) \varnothing_{p,q} = 0$

Từ kết quả của thể vận tốc sóng, chiều cao sóng và hướng sóng sẽ được xác định

5. Kiểm chứng mô hình

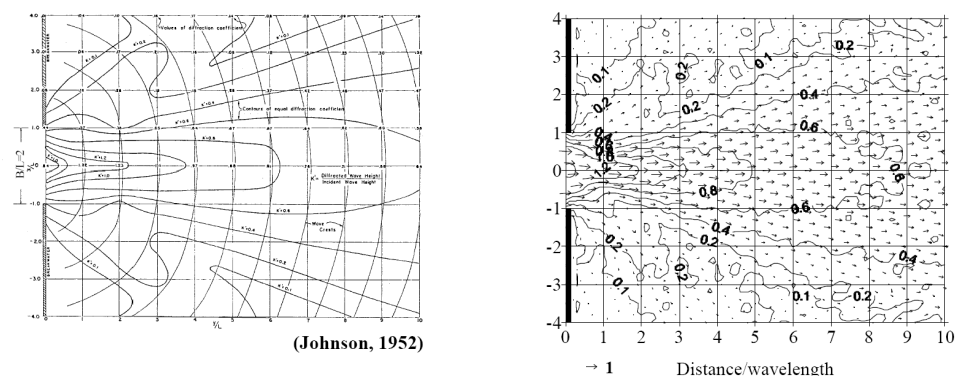
Để đánh giá khả năng của mô hình sóng đề xuất trong việc mô phỏng sự lan truyền sóng tuyến tính trong vùng nước nông trong trường hợp thực tế (sóng khúc xạ-nhiều xạ-phản xạ có kể đến tổn thất do ma sát và sóng vỡ, có công trình biển, góc sóng tới rộng,...), mô hình đã được kiểm chứng với nhiều thí nghiệm (Truong, 1999). Sau đây là một số kết quả tiêu biểu.

Kiểm chứng 1 tiến hành cho trường hợp bãi biển có bậc có độ dốc đáy 1/20, sóng tới thẳng góc với chiều cao sóng $H=6.3$ cm, chu kỳ $T=0.95$ s thực hiện bởi Izumiya (1984) trong Phòng thí nghiệm. Kết quả thí nghiệm và tính toán rất phù hợp, thể hiện được hai điểm vỡ.



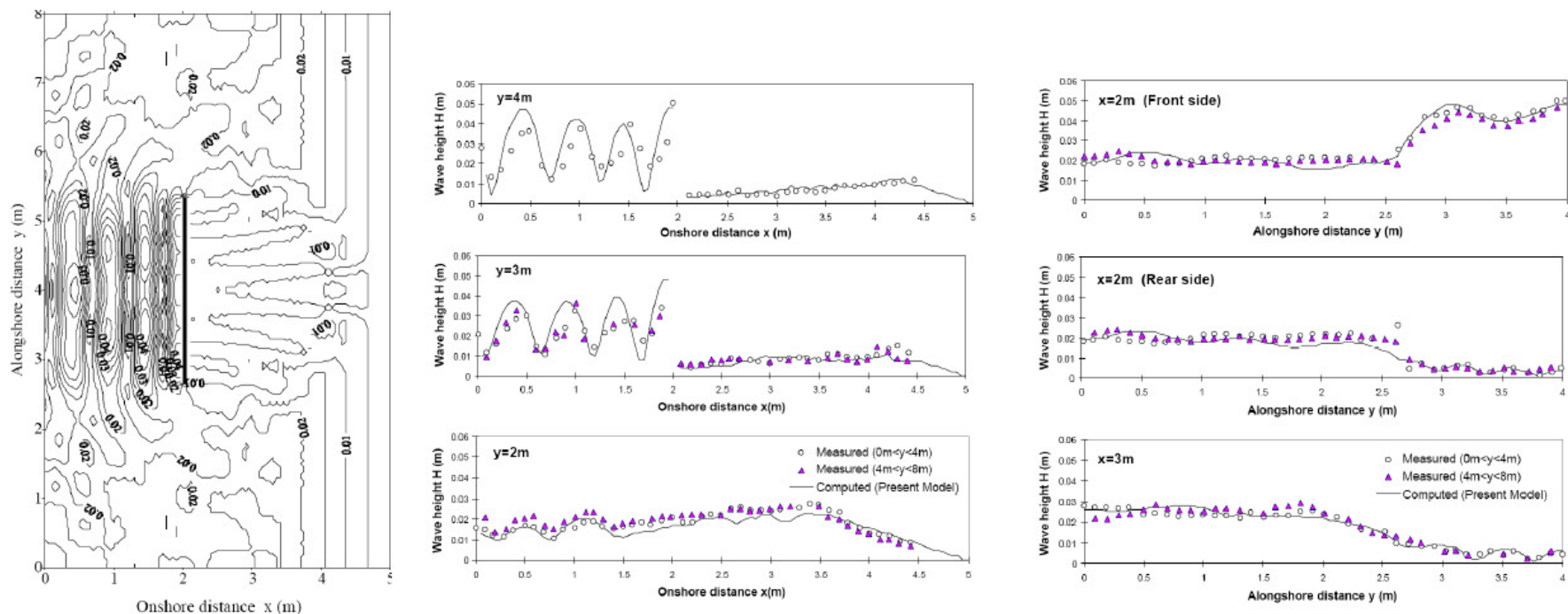
Hình 2 So sánh chiều cao sóng (Kiểm chứng 1)

Kiểm chứng 2 tiến hành cho trường hợp sóng tới thẳng góc vào một cửa đê có chiều rộng bằng 2 chiều dài sóng. Kết quả tính toán được so với biểu đồ nhiễu xạ sóng thiết lập bởi Johnson (1952), Hình 3.



Hình 3 Trường hợp cửa đê (Kiểm chứng 2)

Để đánh giá mô hình trong trường hợp có sóng khúc xạ-nhiều xạ-phản xạ và sóng vỡ, mô hình được kiểm tra với thí nghiệm nổi tiếng của Watanabe và Maruyama (1986) cho trường hợp một đê biển song song bờ (offshore breakwater) có độ dốc đáy 1/50 (Kiểm chứng 3). Chiều cao và chu kỳ sóng thí nghiệm tương ứng là 2cm và 1.2s. Kết quả tính toán và thí nghiệm khá phù hợp, được trình bày trong Hình 4.



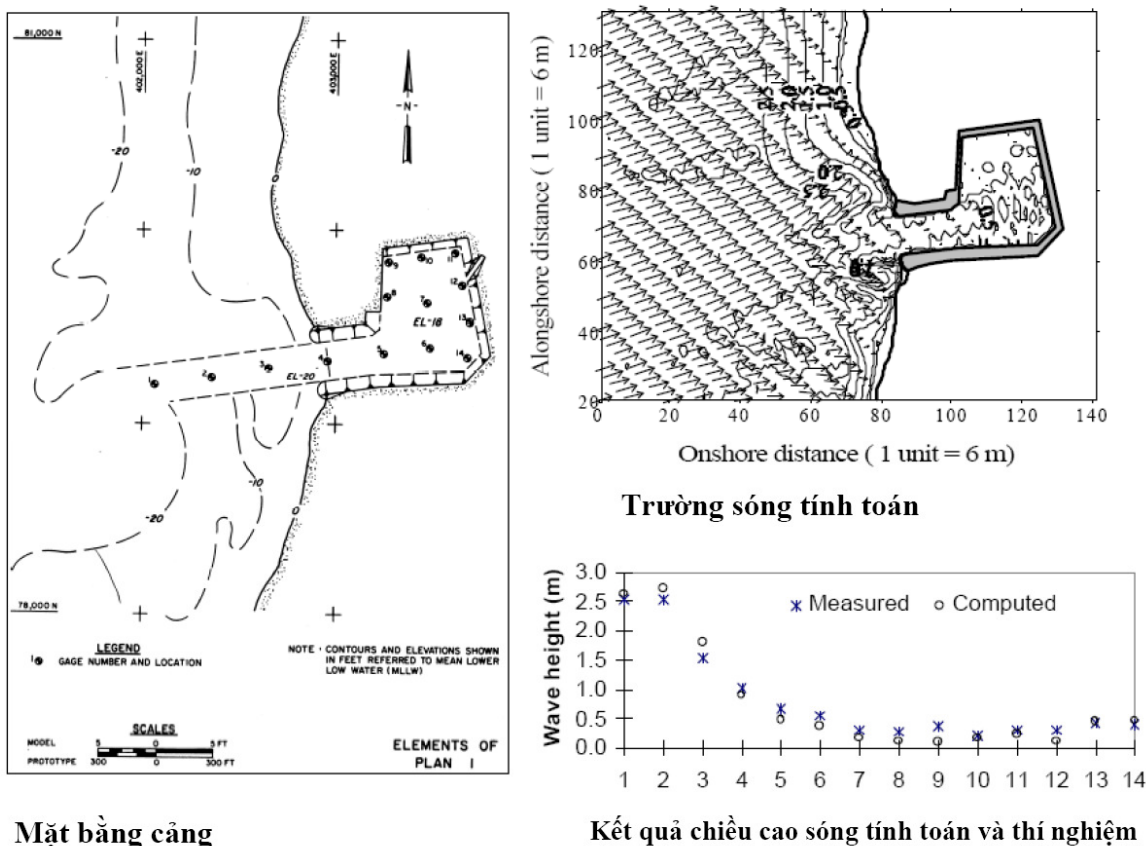
4a. Trường sóng tính toán

4b. Phân bố sóng thẳng góc với bờ

4c. Phân bố sóng song song với bờ

Hình 4 Kết quả tính toán & thí nghiệm cho trường hợp một đê biển song song bờ (Kiểm chứng 3)

Kiểm chứng 4 được thực hiện cho trường hợp bề cảng có cửa vào tại Barking Sands, Kauai, Hawaii. Bottin (1994) đã thực hiện một mô hình vật lý tại Coastal Engineering Research Center, Vicksburg, MS, với tỉ lệ mô hình 1/60. Chiều cao sóng thực và chu kỳ tương ứng là 2.71 m và 7 s. Góc sóng tới là $+22.5^\circ$. Kết quả tính toán và thí nghiệm tại 14 điểm đối chứng rất phù hợp (Hình 5).



Hình 5 Trường hợp bề cảng có cửa vào (Kiểm chứng 4)

Các kiểm chứng trên cho thấy các kết quả tính toán từ mô hình đề xuất và kết quả thí nghiệm rất phù hợp cho nhiều trường hợp thực tế.

6. Kết luận

Nhiều nghiên cứu trước đây đã được thực hiện nhằm phát triển các mô hình sóng tuyến tính nhằm giải quyết các bài toán kỹ thuật thực tế (sóng khúc xạ-nhiều xạ-phản xạ có kể đến tổn thất do ma sát và sóng vỡ, có công trình biển, góc sóng tới rộng,...) một cách có hiệu quả (khối lượng tính toán và bộ nhớ cần thiết nhỏ,...). Mô hình đề xuất đã tương tự các mô hình trước đó, được bổ sung, phát triển tổng quát hơn bao gồm nhiều tham số quan trọng và các giải thuật phù hợp nên có khả năng ứng dụng vào các bài toán thực tế.

Tài liệu tham khảo

- Behrendt, L., 1985. A Finite Element Model for Water Wave Diffraction Including Boundary Absorption and Bottom Friction. Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Series Paper No. 37.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of Combined Refraction-Diffraction. Proceedings of 13th International Conference of Coastal Engineering, ASCE, Vol. 1, pp. 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., Booy N. and Radder, A.C., 1982. Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. Coastal Engineering. 6: 255-279.
- Booij, N., 1981. Gravity Waves on Water with Non-Uniform Depth and Current. Ph.D. Dissertation, Technical University of Delft, Netherlands.
- Bottin, R. R, Jr., 1994. Barking Sands, Kauai, Hawaii, Design of Proposed Harbor for Pacific Missile Range Facility, Coastal Model Investigation. Technical Report CERC 94-10, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Coastal Engineering Research Center. Vicksburg, MS.
- Chawla, A., Ozkan-Haller, H.T. and Kirby, J.T., 1998. Spectral Model for Wave Transformation and Breaking over Irregular Bathymetry. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 124: 189-198.
- Copeland, G.J.M., 1985. A Practical Alternative to the “Mild Slope” Wave Equation. Coastal Engineering. 9: 125-149.
- Ebersole, B. A., Mary, A.C. and Mark, D.P., 1986. Regional Coastal Processes Modeling System. Technical Report CERC 86-4, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Coastal Engineering Research Center. Vicksburg, MS.
- Enquist, B. and Majda, A., 1977. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. Math. Comput. 31:629-651.
- Hurdle, D. P., Kostense, J. K. and Bosch, P. V. D., 1989. Mild Slope Model for the Wave Behaviour in and around Harbours and Coastal Structures in Areas of Variable Depth and Flow Condition. In Advances in Water Modeling and Measurements, BHRA, The Fluid Engineering Centre, Cranfield, Bedford, MK430AJ, pp. 307-324.
- Izumiya, T., 1984. A study of Wave and Wave-Induced Nearshore Currents in the Surf Zone. Ph.D. Dissertation, University of Tokyo, Tokyo, Japan.
- Ishii, T., Isobe, M. and Watanabe, A., 1994. Improved Boundary Conditions to a Time-Dependent Mild-Slope Equation for Random Waves. Proceedings of 24th International Conference of Coastal Engineering, pp. 272-284.

- Isobe, M., 1986. A Parabolic Refraction-Diffraction Equation in the Ray-Front Coordinate System. Proceedings of 20th International Conference of Coastal Engineering, pp. 306-317.
- Isobe, M., 1987. A Parabolic Equation Model for Transformation of Irregular Waves Due to Refraction, Diffraction and Breaking. Coastal Engineering in Japan. 30: 33-47.
- Isobe, M., 1994. Time Dependent Mild Slope Equation for Random Waves. Proceedings of 24th International Conference of Coastal Engineering, pp. 285-299.
- Ito, Y. and Tanimoto, K., 1972. A Method of Numerical Analysis of Wave Propagation- Application to Wave Refraction and Diffraction. Proceedings of 13th International Conference of Coastal Engineering, pp. 503-522.
- Jennings, A., 1980. Matrix Computation for Engineers and Scientist. Wiley-Interscience, New York.
- Johnson, J. W., 1952. Generalized Wave Diffraction Diagrams, Proceedings of 2nd International Conference of Coastal Engineering.
- Kubo, Y., Kotake, Y., Isobe, M. and Watanabe, A., 1992. Time Dependent Mild Slope Equation for Random Waves. Proceedings of 23rd International Conference of Coastal Engineering, pp. 419-431.
- Kirby, J. T., 1986. Rational Approximation in the Parabolic Equation Method for Water Waves. Coastal Engineering. 10: 355-378.
- Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A., 1994. Combined Refraction-Diffraction Model. CACR Report No. 92-04, University of Delaware, Newark.
- Larsen, J. and Dancy, H., 1983. Open Boundaries in Short Wave Simulations- A New Approach. Coastal Engineering. 7: 285-297.
- Li, B., 1994. A Evolution Equation for Water Waves. Coastal Engineering. 23: 227-242.
- Madsen, P. A. and Larsen, J., 1987. A Efficient Finite Difference Approach to the Mild Slope Equation. Coastal Engineering. 11: 329-351.
- Panchang, V.G., Cushman-Roisin, B. and Pearce, B.R., 1988. Combined Refraction-Diffraction of Short-Waves in Large Coastal Region. Coastal Engineering. 12: 133-156.
- Panchang, V.G., Wei, G., Pearce, B.R. and Briggs., M.J., 1990. Numerical Simulation of Irregular Wave Propagation over Shoal. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 116: 324-338.
- Radder, A. C., 1979. On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation. Journal of Fluid Mechanics. 95(1): 159-176.
- Sato, N., Isobe, M. and Izumiya, T., 1990. A Numerical Model for Calculating Wave Height Distribution in a Harbor of Arbitrary Shape. Coastal Engineering In Japan. 33(2): 120-131.
- Truong, N.T, 1999. Wave, Wave-Induced Current and Coastal Area Morphology Models in The Presence of Coastal Structures and The Surf Zone. Dissertation, Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand.
- Watanabe, A. and Maruyama, K., 1986. Numerical Modelling of Nearshore Wave Field Under Combined Refraction, Diffraction and Breaking. Coastal Engineering in Japan. (29): 19-39.
- Wiegel, R. L., 1962. Diffraction of Waves by a Semi-Infinite Breakwater. Journal of The Hydraulics Division, ASCE. 88(1): 27-44.
- Yoo, D., Hedges, T. S. and O'Connor, B. A., 1989. Numerical Modeling of Reflective Waves on Slowly Varying Currents. In Advances in Water Modeling and Measurements, BHRA, the Fluid Engineering Centre, Cranfield, Bedford, MK430AJ, pp. 297-306.
- Yu, X., Isobe, M. and Watanabe, A., 1992. Finite Element Solution of Wave Field around Structures in Nearshore Zone. Coastal Engineering In Japan. 35(1): 21-33.
- Yu, X., Isobe, M. and Watanabe, A., 1998. A Non Linear Model of Monochromatic Waves on Steady Currents Over Gradually Varying Bottoms. Coastal Engineering Journal. 40(3): 265-290.