

PHƯƠNG PHÁP NĂM MÔ MEN – PHƯƠNG PHÁP NĂM MÔ MEN GẦN ĐÚNG VÀ ỨNG DỤNG ĐỂ TÍNH DẦM TRÊN GỐI ĐÀN HỒI CỤC BỘ

Ts. Phan Dũng

I. Giới thiệu

1.1 Mặc dù bài toán dầm trên gối đàn hồi cục bộ có thể được giải quyết một cách dễ dàng nhờ các phần mềm tính kết cấu như SAP – 2000 chẳng hạn, nhưng Phương pháp Năm mô men “cổ điển” vẫn được chúng tôi triển khai nghiên cứu ứng dụng, bởi các lý do sau:

1. Đây là một phương pháp quen thuộc trong môn Cơ học kết cấu đối với sinh viên và kỹ sư ngành Xây dựng.

2. Phối hợp các kiến thức cơ bản khác trong môn cơ học kết cấu khi vận dụng phương pháp lực này giúp hiểu rõ bản chất cơ học về mặt kỹ thuật xây dựng để thiết lập lời giải cho một số bài toán cụ thể về dầm trên gối đàn hồi cục bộ.

3. Mở rộng phạm vi ứng dụng Phương pháp Năm mô men để tính toán dầm trên nền đàn hồi Winkler, cọc chịu lực ngang và cả móng cọc.

1.2 Với những mục tiêu như trên, xin được không chứng minh, giải thích chi tiết mà chỉ đưa ra các sơ đồ, các công thức hoặc kết quả cuối cùng trong trường hợp chung cũng như ở các bài toán cụ thể. Hai vấn đề chính về dầm trên gối đàn hồi sẽ được trình bày, đó là:

1. Tóm tắt lý thuyết Phương pháp Năm mô men gần đúng và ứng dụng trực tiếp của nó.

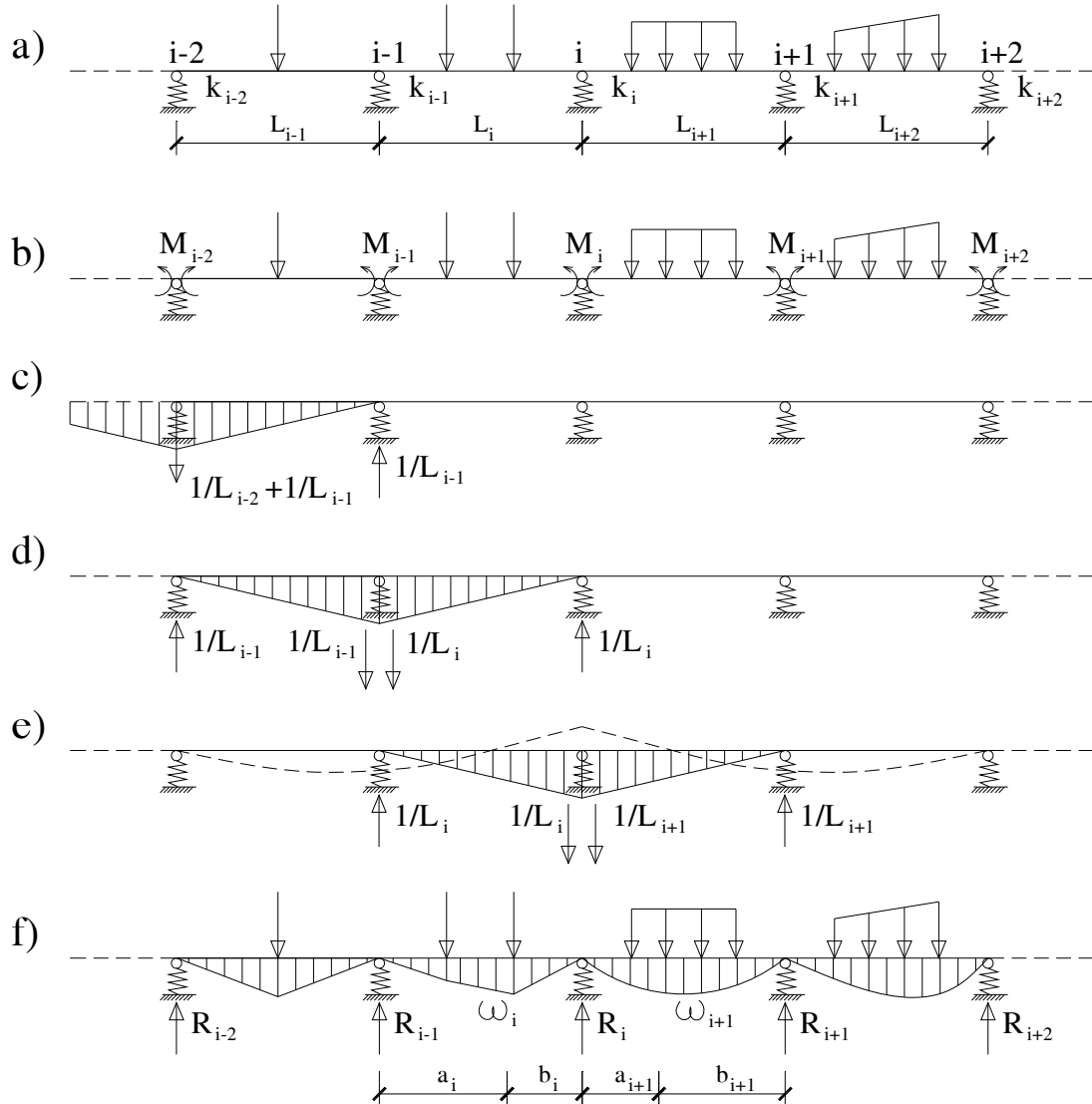
2. Xây dựng nội dung của Phương pháp Năm mô men gần đúng và các ứng dụng ban đầu để giải một số bài toán phức tạp về dầm trên gối đàn hồi cục bộ.

II. Phương pháp Năm mô men

2.1 Công thức chung:

Hình 1 biểu diễn các sơ đồ cơ bản của Phương pháp Năm mô men và phương trình chính tắc viết cho gối tựa trung gian thứ i từ [1] như sau:

$$\delta_{i(i-2)}M_{i-2} + \delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{i+1} + \delta_{i(i+2)}M_{i+2} + \Delta_{ip} = 0 \quad (1)$$



Hình 1: Các sơ đồ và biểu đồ của Phương pháp Năm mô men,

a: Dầm trên gối đàn hồi cục bộ (các nhịp trung gian);

b: Hệ cơ bản;

c, d, e: Biểu đồ mô men đơn vị;

f: Biểu đồ mô men ngoại lực trên hệ cơ bản.

Trong đó:

M_i = ẩn số mô men cần tìm,

δ_{ij} = góc xoay tại tiết diện gối i trong hệ cơ bản khi chịu mô men đơn vị đặt tại j , được gọi là hệ số của ẩn số,

Δ_{ip} = góc xoay tại tiết diện gối i do tải trọng ngoài gây ra trên hệ cơ bản, được gọi là các số hạng tự do.

Với:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{(i-2)i} = \delta_{i(i-2)} &= [0] + \left[\frac{k_{i-1}}{L_i L_{i-1}} \right] \\ \delta_{(i-1)i} = \delta_{i(i-1)} &= \left[\frac{L_i}{6EI} \right] + \left[-\frac{k_{i-1}}{L_i} \left(\frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) - \frac{k_i}{L_i} \left(\frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) \right] \\ \delta_{ii} &= \left[\frac{L_i}{3EI} + \frac{L_{i+1}}{3EI} \right] + \left[\frac{k_{i-1}}{L_i^2} + k_i \left(\frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right)^2 + \frac{k_{i+1}}{L_{i+1}^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\Delta_{ip} = \left[\frac{\omega_i a_i}{L_i EI} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{L_{i+1} EI} \right] + \left[\frac{k_{i-1}}{L_i} R_{i-1} - k_i R_i \left(\frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) + \frac{k_{i+1}}{L_{i+1}} R_{i+1} \right] \quad (3)$$

Có thể viết lại (2) và (3) dạng gọn, bao gồm hai thành phần:

$$\delta_{ij} = [\delta_{ij}^d] + [\delta_{ij}^g] \quad (4)$$

$$\text{và} \quad \Delta_{ij} = [\Delta_{ip}^d] + [\Delta_{ip}^g] \quad (5)$$

với các chỉ số trên: d = dầm; g = gối (hoặc là nền).

Dựa vào những công thức chung này có thể xây dựng lời giải cụ thể của các lớp bài toán về dầm trên gối đàn hồi. Kết quả thu được từ cách này sẽ được kiểm tra bằng phần mềm SAP 2000. Cần chú ý rằng, giải thuật của bài toán dầm trên gối đàn hồi mà dựa vào đó để viết phần mềm SAP 2000 là phương pháp phần tử hữu hạn (mô hình chuyển vị) nhưng ở bài toán dầm thì, cho phép điều chỉnh việc chia toàn bộ kết cấu dầm thành các đoạn giống như ở Phương pháp Năm mô men.

Trong khi chưa viết được phần mềm dựa trên Phương pháp Năm mô men, để giải quyết một số bài toán có khối lượng tính lớn chúng tôi đã sử dụng kết quả của SAP 2000 sau khi đã chứng minh được khả năng giải của Phương pháp Năm mô men.

2.2 Dầm liên tục nhiều nhịp trên các gối đàn hồi cục bộ

1. Đường ảnh hưởng (ĐAH) nội lực

Trong [5] đã cho nhiều bảng tra để tìm ĐAH nội lực đối với dầm liên tục bốn nhịp trên các gối đàn hồi cục bộ dựa trên kết quả lời giải phương trình Năm mô

men. Nhờ đó, nội lực bất lợi trong dầm khi chịu tải trọng di động được xác định rõ ràng và có cơ sở khoa học.

Sau khi kiểm chứng bằng SAP 2000 ta có thể nhờ phần mềm này lập bảng ĐAH cho các dầm có số nhịp nhỏ hoặc lớn hơn 4 [9a, 9b].

2. Tính toán công trình bến (CTB) trên nền cọc (loại hở)

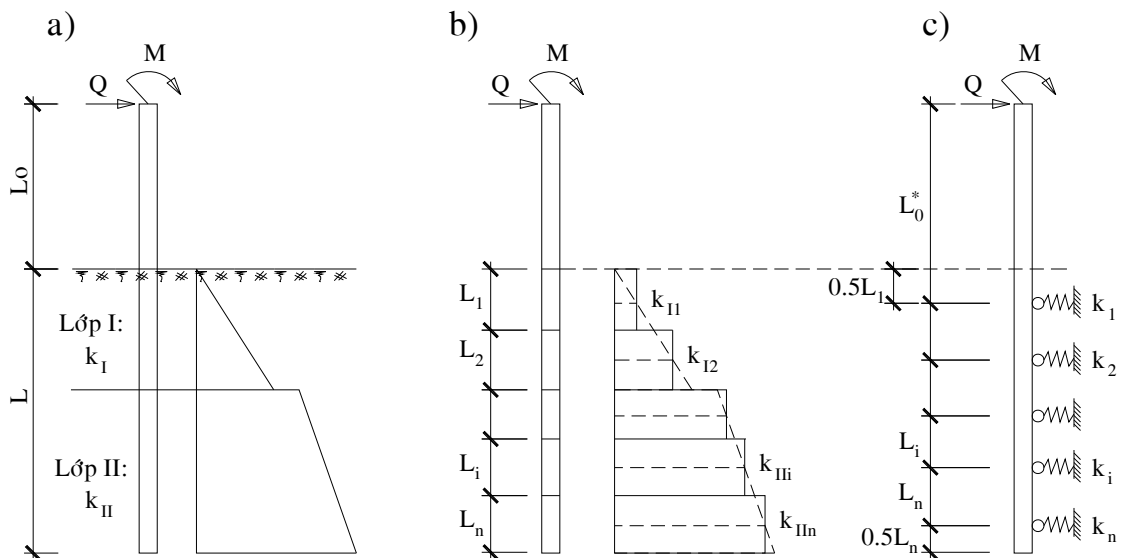
2a. Phương pháp của Giáo sư Zarembo – Vladutranxki [3]: Ở những CTB mà độ mềm (như là tỷ số giữa lũy thừa ba chiều dài nhịp với mô men quán tính tiết diện ngang) của cọc lớn hơn nhiều lần so với dầm ngang thì có thể coi liên kết đầu cọc vào bệ là khớp. Khi đó, ở giai đoạn cần xét đặc tính đàn hồi của dầm ngang trên gối đàn hồi, tác giả này đã dùng phương pháp Năm mô men.

2b. Dựa vào ý tưởng của OCDI [4] về việc tính chuyển vị – nội lực trong CTB trên nền cọc với các cọc thẳng đứng khi trên bệ (dầm ngang) chịu tải tĩnh cũng như di động nhờ phương trình Năm mô men [9b] đã thu được kết quả hợp lý hơn.

2.3 Tính toán cọc chịu lực ngang

1. Sơ đồ tính toán

Xét một cọc đơn chịu lực ngang đóng thẳng đứng qua hai lớp đất khác nhau với hệ số tỷ lệ của hệ số nền k_I và k_{II} (kN/m^4) như hình 2a.



Hình 2: Sơ đồ tính cọc chịu lực ngang

- Sơ đồ cọc đất với biểu đồ hệ số nền ban đầu,
- Sơ đồ cọc đất với biểu đồ hệ số nền dạng bậc,
- Sơ đồ dầm liên tục trên các gối đàn hồi.

Sau khi rời rạc hóa phần cọc trong đất thành nhiều đoạn (có thể độ dài bằng nhau) ta nhận được biểu đồ hệ số nền dạng bậc; trong phạm vi chiều dài mỗi đoạn cọc giá trị hệ số nền không đổi k_{ii} (Hình 2b). Theo cách làm trong [2] tác dụng của đất lên cọc trong đoạn i chẳng hạn, được thay thế bằng một gối đàn hồi tương đương, có độ cứng k_i (kN/m):

$$k_i = k_{zi} S_i \quad (6)$$

Trong đó:

k_{zi} : hệ số nền tại độ sâu của gối i (kN/m³), được tính theo công thức:

$$k_{zi} = k_{ii} Z_i \quad (7)$$

k_{ii} : hệ số tỷ lệ của hệ số nền (kN/m⁴) thuộc lớp I ứng với đoạn cọc thứ i dài L_i .

Z_i : độ sâu (m) đến điểm tính kể từ mặt đất.

S_i : diện tích tính toán (m²) thuộc phạm vi gối đàn hồi i , được tính bởi:

$$S_i = D_{tt} L_i \quad (8)$$

D_{tt} : đường kính tính toán của cọc (m) được xác định như hướng dẫn trong [6], [7].

Bằng cách làm như thế ta chuyển đổi bài toán cọc chịu lực ngang trong đất nền đàn hồi cục bộ về sơ đồ dầm liên tục trên các gối đàn hồi (H. 2c). Lúc này, chuyển vị – nội lực trong dầm (cọc) được tính bởi Phương pháp Năm mô men.

2. Tính cọc chịu lực ngang (đầu cọc: tự do, chân cọc: tự do): Hình 3.

① Các hệ số của ẩn số δ_{ij} (rad/kNm)

$$\delta_{22} = 4,48414 \cdot 10^{-5}$$

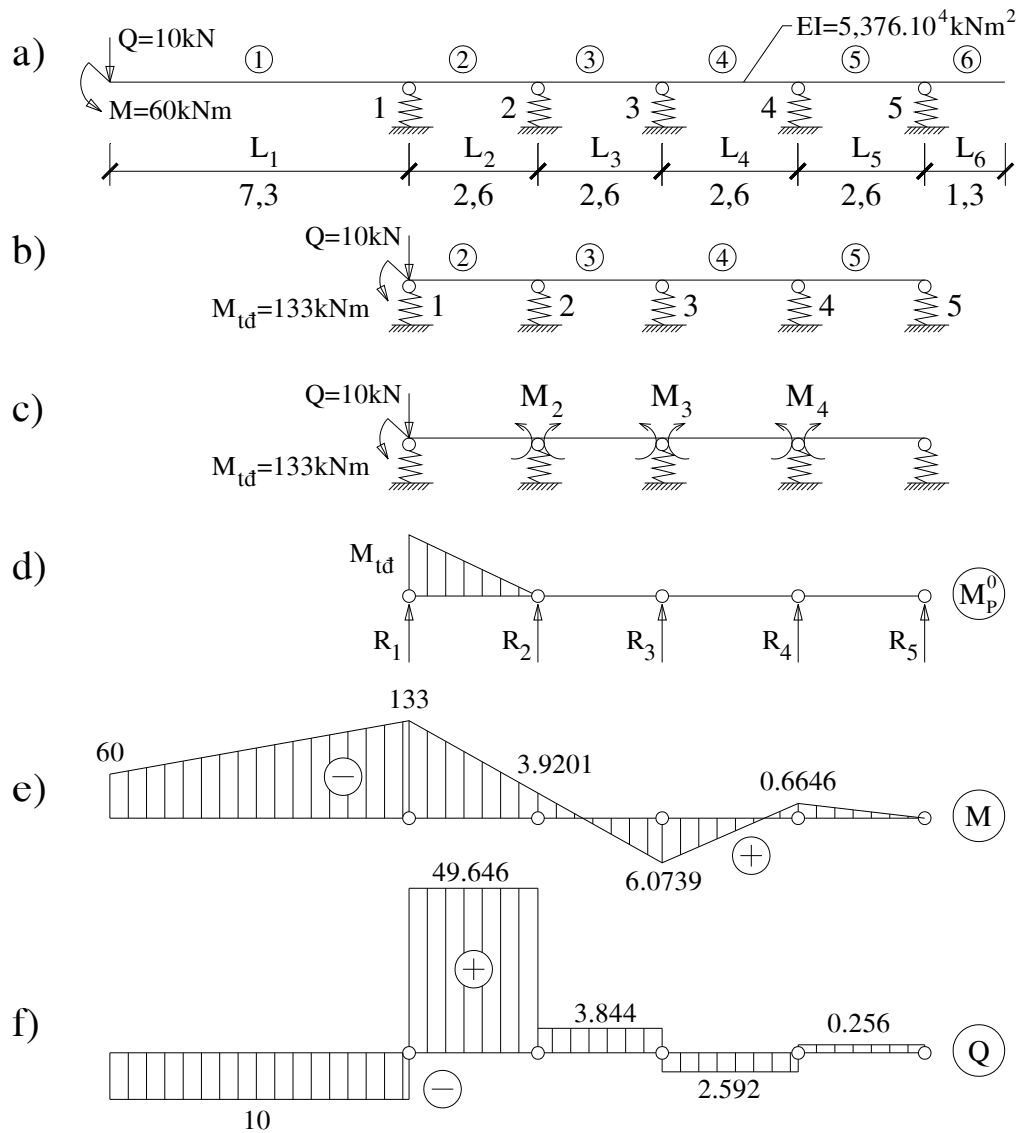
$$\delta_{23} = 2,75555 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{24} = 9,94681 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta_{33} = 3,85900 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{34} = 4,65018 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{44} = 3,66313 \cdot 10^{-5}$$



Hình 3: Tính cọc chịu lực ngang đóng trong nền đồng nhất có $k = 8000\text{kN/m}^4$.

a. và b. Sơ đồ dầm trên gối đàn hồi tương đương,

c. Hệ cơ bản,

d. Biểu đồ M_p^0

e. và f. Biểu đồ nội lực trong cọc (M, Q).

② Các số hạng tự do Δ_{ip} (rad)

$$\Delta_{2p} = 1,579 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta_{3p} = -2,200 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta_{4p} = 0$$

③ Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \delta_{24}M_4 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \delta_{34}M_4 + \Delta_{3p} = 0 \\ \delta_{42}M_2 + \delta_{43}M_3 + \delta_{44}M_4 + \Delta_{4p} = 0 \end{cases}$$

Nghiệm: $M_2 = -3,920 \text{ kNm},$

$$M_3 = 6,074 \text{ kNm},$$

$$M_4 = -0,665 \text{ kNm}.$$

Ghi chú:

- Kết quả hoàn toàn phù hợp với lời giải của SAP 2000.
- Nếu chia phần tử cọc trong đất thành 50 đoạn, kết quả thu được gần như phương pháp giải tích (xem [9b]).

3. Xác định giá trị các độ cứng chống chuyển vị đầu cọc (đầu cọc: ngàm, chân cọc: tự do): Hình 4.

① Các hệ số của ảnh số δ_{ij} (rad/kNm)

$$\delta_{00} = 4,76500.10^{-5}$$

$$\delta_{01} = 2,24007.10^{-5}$$

$$\delta_{02} = 8,68300.10^{-7}$$

$$\delta_{11} = 7,22521.10^{-5}$$

$$\delta_{12} = 5,81219.10^{-6}$$

$$\delta_{13} = 6,79036.10^{-7}$$

$$\delta_{22} = 4,54633.10^{-5}$$

$$\delta_{23} = 7,90273.10^{-6}$$

$$\delta_{33} = 4,29023.10^{-5}$$

② Các số hạng tự do Δ_{ip} (rad)

$$\Delta = 1 \text{ (H. 4c)}$$

$$\Delta_{0z} = -131,147541.10^{-3}$$

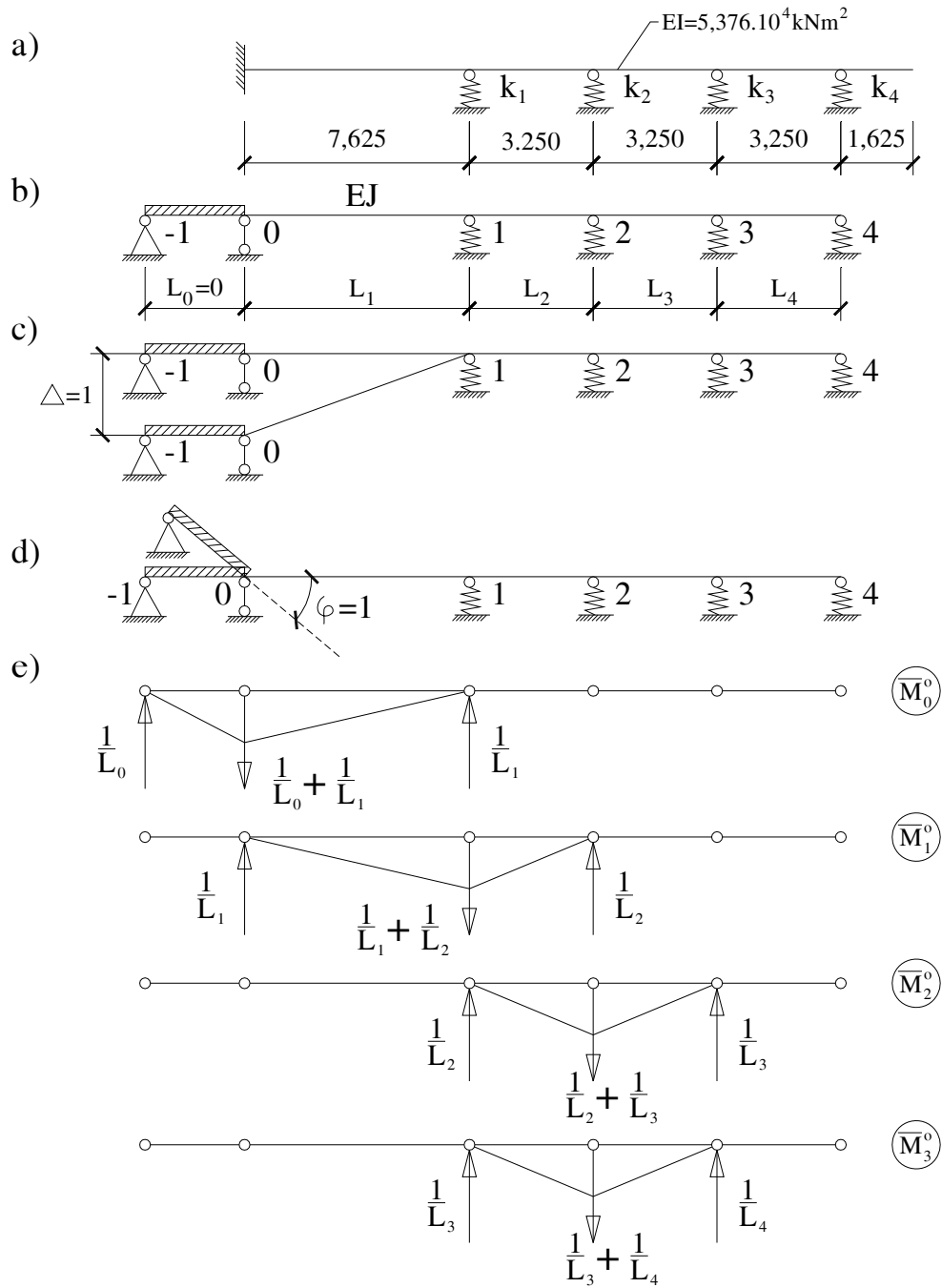
$$\Delta_{1z} = -\Delta_{0z}$$

$$\Delta_{2z} = \Delta_{3z} = 0$$

$$\varphi = 1 \text{ (H. 4d)}$$

$$\Delta_{0z} = -1$$

$$\Delta_{1z} = \Delta_{2z} = \Delta_{3z} = 0$$



Hình 4: Tính độ cứng chống chuyển vị đầu cọc đóng trong nền đồng nhất có $k = 8000 \text{ kN/m}^4$.

- Sơ đồ tính toán,
- Sơ đồ dầm tương đương,
- Chuyển vị ngang $\Delta = 1$,
- Chuyển vị xoay $\varphi = 1$,
- Các biểu đồ mô men đơn vị.

③ Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{00}M_0 + \delta_{01}M_1 + \delta_{02}M_2 + \delta_{03}M_3 + \Delta_{0z} = 0 \\ \delta_{10}M_0 + \delta_{11}M_1 + \delta_{12}M_2 + \delta_{13}M_3 + \Delta_{1z} = 0 \\ \delta_{20}M_0 + \delta_{21}M_1 + \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \Delta_{2z} = 0 \\ \delta_{30}M_0 + \delta_{31}M_1 + \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \Delta_{3z} = 0 \end{cases}$$

Nghiệm:

	M_0	M_1	M_2	M_3
$\Delta = 1$	4228,2	-3152,0	3,239	-9,8
$\varphi = 1$	24579,0	-7661,0	505,0	28,0

④ Độ cứng chuyển vị đầu cọc

Khi $\Delta = 1$: $\bar{M}_\Delta = 4228,2 \text{ kNm/m}$,

$$\bar{Q}_\Delta = 967,895 \text{ kN/m}.$$

Khi $\varphi = 1$: $\bar{M}_\varphi = 24579,0 \text{ kNm/rad.}$,

$$\bar{Q}_\varphi = 4228,197 \text{ kN/rad.}$$

4. Tính mô men ngàm tại đầu cọc khi chịu lực ngang Q (đầu cọc: ngàm trượt, chân cọc: tự do): Hình 5.

① Các hệ số của ẩn số δ_{ij} (rad/kNm)

$$\delta_{11} = 1,619 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{12} = 7,83202 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{13} = 1,6578 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{14} = 0$$

$$\delta_{22} = 4,48414 \cdot 10^{-5}$$

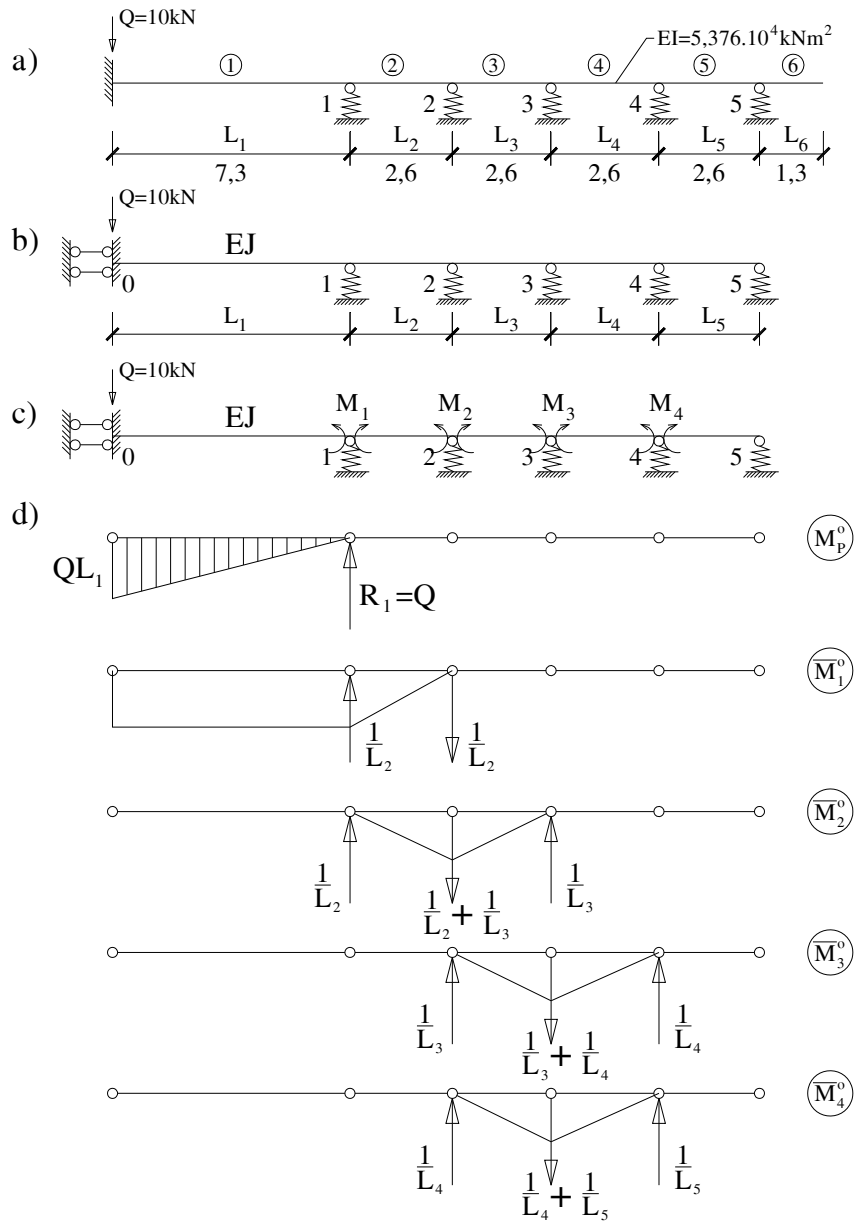
$$\delta_{23} = 2,756 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{24} = 9,94681 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta_{33} = 3,85891 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{34} = 4,650 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{44} = 3,663 \cdot 10^{-5}$$



Hình 5: Tính toán mô men ngàm đầu cọc khi chịu lực ngang trong nền đồng nhất có $k = 8000\text{kN/m}^4$.

- a. Sơ đồ tính toán,
- b. Sơ đồ dầm tương đương,
- c. Hệ cơ bản,
- d. Các biểu đồ mô men.

② Các số hạng tự do Δ_{ip} (rad)

$$\Delta_{1p} = 4,827 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta_{2p} = 0,129 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta_{3p} = \Delta_{4p} = 0.$$

③ Hệ phương trình chính tắc

$$\begin{cases} \delta_{11}M_1 + \delta_{12}M_2 + \delta_{13}M_3 + \delta_{14}M_4 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}M_1 + \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \delta_{24}M_4 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31}M_1 + \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \delta_{34}M_4 + \Delta_{3p} = 0 \\ \delta_{41}M_1 + \delta_{42}M_2 + \delta_{43}M_3 + \delta_{44}M_4 + \Delta_{4p} = 0 \end{cases}$$

Nghiệm các mô men gối (kNm):

$$M_1 = -29,9447$$

$$M_2 = 2,2807$$

$$M_3 = 1,1486$$

$$M_4 = -0,2077.$$

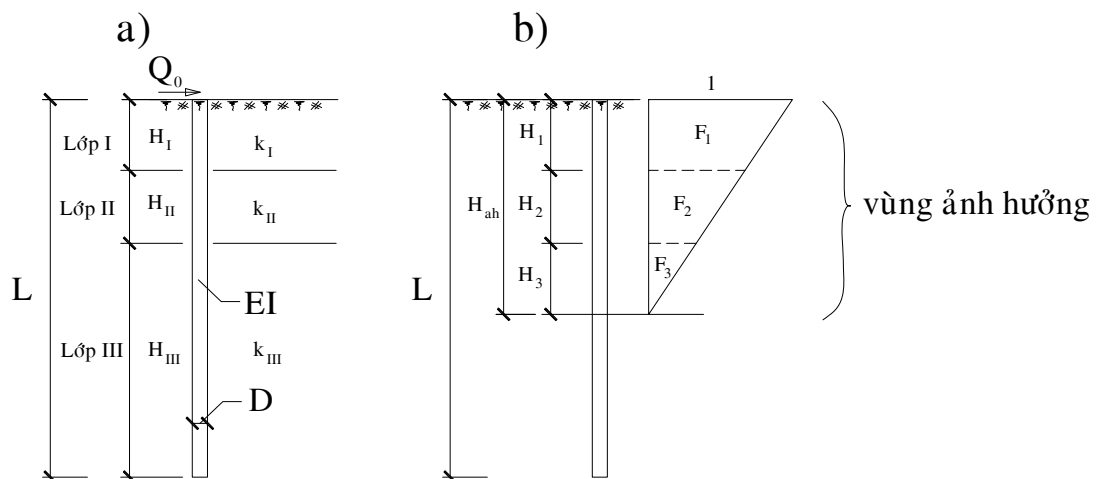
④ Mô men đầu cọc khi chịu lực ngang $Q = 10\text{kN}$

$$M_{\text{ngàm}} = \bar{M}_{01} \cdot M_1 + M_p^0 = 43,06 \text{ kNm}.$$

Có thể kiểm tra bằng nhiều cách cho thấy kết quả trên là hợp lý.

5. Phân tích chuyển vị – nội lực của cọc chịu lực ngang trong nền phân lớp

① Cách tính của TCXD 205 – 1998:



Hình 6: Cách quy đổi nền phân lớp về nền đồng nhất.

Cọc chịu lực ngang trong nền nhiều lớp (H. 6a) được quy đổi về cọc chịu lực ngang trong nền đồng nhất với hệ số tỷ lệ của hệ số nền trung bình $k_{tr,b}$ (kN/m^4) theo công thức (ví dụ vùng ảnh hưởng chứa 3 lớp):

$$k_{\text{tr.b}} = \frac{k_{\text{I}}F_1 + k_{\text{II}}F_2 + k_{\text{III}}F_3}{F_1 + F_2 + F_3} \quad (9)$$

Ở đây: F_1 , F_2 và F_3 – diện tích tỷ lệ ảnh hưởng của lớp I, lớp II và lớp III.

Chiều dày chung của tầng đất trên mặt ảnh hưởng có tính chất quyết định đến sự làm việc của cọc chịu lực ngang, ký hiệu: H_{ah} có thể tính theo [6], [7] hoặc [8]:

$$H_{\text{ah}} = 2(D+1) \quad (10)$$

$$H_{\text{ah}} = 3,5D+1,5 \quad (11)$$

$$H_{\text{ah}} = \frac{1,8}{\alpha} \quad (12)$$

Với α : hệ số biến dạng (m^{-1}),

$$\alpha = \sqrt[5]{\frac{kD_{\text{tt}}}{EI}}$$

D và D_{tt} : đường kính và đường kính tính toán của cọc được xác định theo [6], [7].

Giá trị của H_{ah} theo (10) và (11) rất đơn giản còn theo (12) ta phải tính lập. Trình tự tính H_{ah} theo (12) được mô tả qua thí dụ sau:

Số liệu cho trước:

- Cọc:
 - + Tiết diện vuông $D = 0,3 \text{ m}$; $D_{\text{tt}} = 0,9 \text{ m}$.
 - + Bê tông cốt thép thường $EI = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ kNm}^2$.
- Nền đất ba lớp:
 - + Lớp I: $k_{\text{I}} = 3000 \text{ kN/m}^4$, $H_{\text{I}} = 1,0 \text{ m}$.
 - + Lớp II: $k_{\text{II}} = 4000 \text{ kN/m}^4$, $H_{\text{II}} = 1,0 \text{ m}$.
 - + Lớp III: $k_{\text{III}} = 8000 \text{ kN/m}^4$, $H_{\text{III}} = \infty$.

Giải:

Bước 1: $k_{\text{tr.b}}^{(1)} = \frac{1}{3}(3000 + 4000 + 8000) = 5000 \text{ kN/m}^4$.

Từ (13): $\alpha^{(1)} = 0,7758 \text{ m}^{-1}$.

Từ (12): $H_{ah}^{(1)} = 2,320 \text{ m.}$

Bước 2: Từ kết quả trên, dùng (9):

$$k_{tr.b}^{(2)} = 3323,75 \text{ kN/m}^4.$$

Từ (13): $\alpha^{(2)} = 0,7150 \text{ m}^{-1}.$

Từ (12): $H_{ah}^{(2)} = 2,518 \text{ m.}$

Cứ như thế, lặp cho đến khi thu được giá trị hội tụ của H_{ah} thỏa mãn một sai số cho trước.

Kết quả tính toán được ghi tóm tắt ở bảng 1:

Bảng 1: Giá trị H_{ah} tính theo công thức (12):

Đại lượng	Vòng lặp số					
	1	2	3	4	5	6
$k_{tr.b}$ (kN/m ⁴)	5000	3323,75	3532,41	3510,93	3513,07	3512,85
α (m ⁻¹)	0,7758	0,7150	0,7237	0,7229	0,7229	0,7229
H_{ah} (m)	2,320	2,518	2,487	2,490	2,4898	2,4898

Giá trị H_{ah} tính theo các công thức khác nhau cho ở bảng 2.

Bảng 2: So sánh giá trị H_{ah} (m) theo các công thức

Đại lượng	Công thức (10)	Công thức (11)	Công thức (12)
$k_{tr.b}$ (kN/m ⁴)	2,60	2,55	2,49
α (m ⁻¹)	3588,0	3555,56	3512,85
H_{ah} (m)	0,726	0,725	0,723

Sau khi quy đổi nền phân lớp về nền đồng nhất với hệ số tỷ lệ trung bình của hệ số nền $k_{tr.b}$, chuyển vị – nội lực trong cọc được tính bằng các công thức giải tích.

② Cách tính nền phân lớp:

Sử dụng cách quy đổi cọc chịu lực ngang trong nền phân lớp về dầm liên tục trên các gối tựa đàn hồi có độ cứng khác nhau (xem H. 2) rồi dùng phương pháp Năm mô men để xác định chuyển vị – nội lực trong cọc.

③ Đánh giá mức độ hợp lý của cách tính theo nền đồng nhất (NDN) và nền phân lớp (NPL) được thực hiện bằng số qua 8 phương án nền phân lớp (bảng 4) và 3 loại cọc thường gặp. Các thông số về cọc ghi ở bảng 3.

Bảng 3: Các thông số của ba loại cọc.

Thông số	Cọc vuông BTCT	Cọc ống thép	Cọc ống BTCTUST
1. Kích thước tiết diện (mm)	400	600	700
2. Chiều dày thành (mm)	-	16	110
3. Chiều dài cọc (m)	13	13	13
4. Độ cứng chống uốn, EI (kNm ²)	$5,376.10^4$	$2,6287.10^5$	$3,1197.10^5$
5. Lực ngang, Q ₀ (kN)	20	50	50
6. Mô men cho phép nứt (kNm)	70	-	400
7. Mô men cho phép về độ bền (kNm)	220	1150	690

Như đã nói trước đây, để thu được số liệu “mịn” đủ để dễ dàng so sánh với lời giải giải tích, ở trường hợp nền phân lớp chúng tôi đã sử dụng phần mềm SAP 2000. Kết quả chính được tổng kết trong bảng 4 và vẽ được 24 bộ đồ thị so sánh chuyển vị – nội lực trong cọc. Hình 7 là một trong những bộ đồ thị như thế. Từ những con số này có thể nêu một số nhận xét sau:

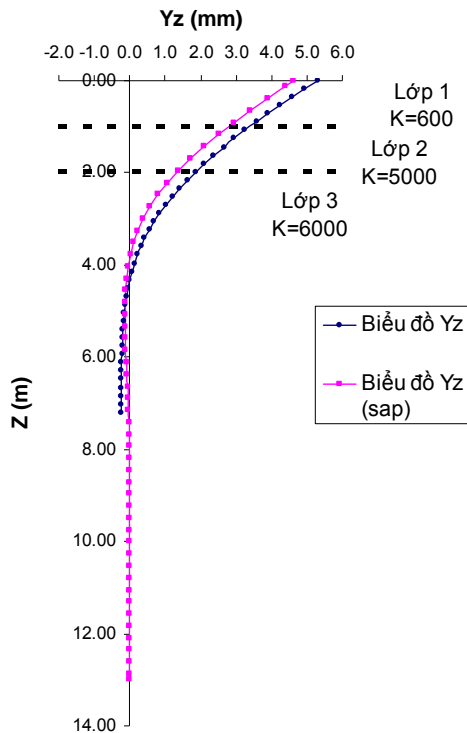
- Quy luật biến thiên của các đại lượng chuyển vị – nội lực khi tính cọc chịu lực ngang trong nền phân lớp và trong nền đồng nhất quy đổi tương đối phù hợp nhau. Có lẽ vì thế mà nền đồng nhất quy đổi được khuyến nghị dùng trong tiêu chuẩn thiết kế móng cọc.
- Ở hầu hết các phương án nền phân lớp được xét, tính theo nền đồng nhất quy đổi cho chuyển vị ngang của cọc lớn hơn nền phân lớp, có trường hợp lớn hơn 22%. Tuy nhiên, về mô men max thì bức tranh ngược lại, hầu hết các phương án nền đồng nhất quy đổi cho giá trị nhỏ hơn từ 9÷13% so với nền phân lớp.
- Phản lực nền lên cọc ở hầu hết các phương án, nền đồng nhất quy đổi biểu thị giá trị trung bình của nền đất phân lớp. Chú ý rằng, ở nền phân lớp, biểu đồ phản lực nền có bước nhảy tại ranh giới giữa hai lớp (H. 7d).

Trên cơ sở này, khi tính cọc chịu lực ngang trong nền phân lớp theo TCXD 205 – 1998, có thể đề xuất các kiến nghị sau:

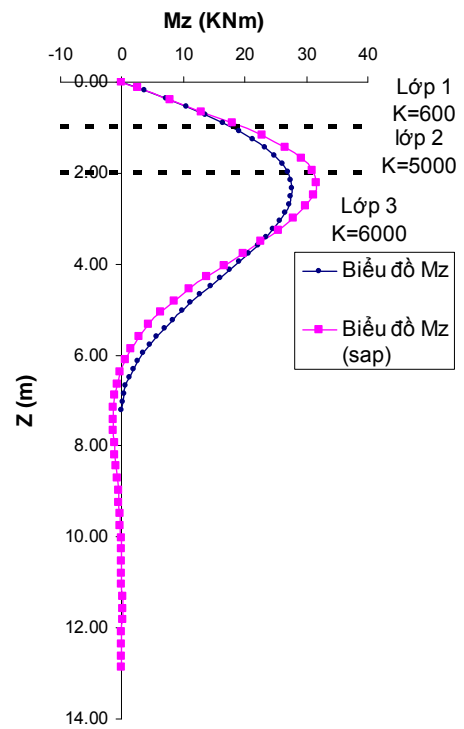
① Nên tăng giá trị mô men max nhận được từ kết quả nền đồng nhất quy đổi lên 15% để xét đến ảnh hưởng phân lớp của nền đất.

② Việc kiểm tra điều kiện bền của nền đất xung quanh cọc chịu lực ngang, ngoài các vị trí có độ sâu được TCXD 205 – 1998 quy định, cần phải thực hiện thêm tại ranh giới giữa các lớp.

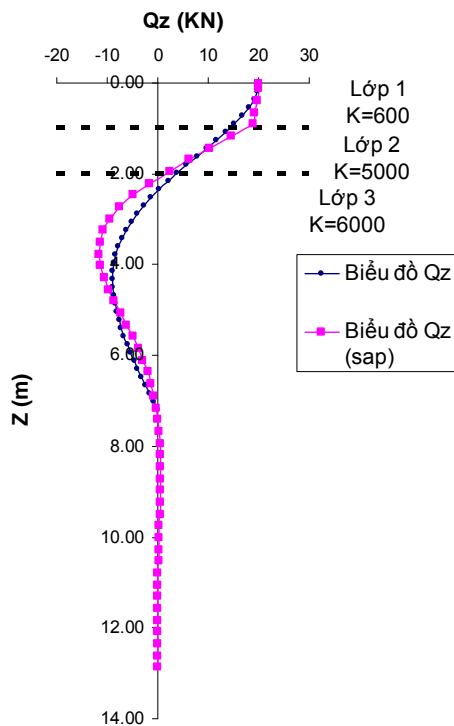
a)



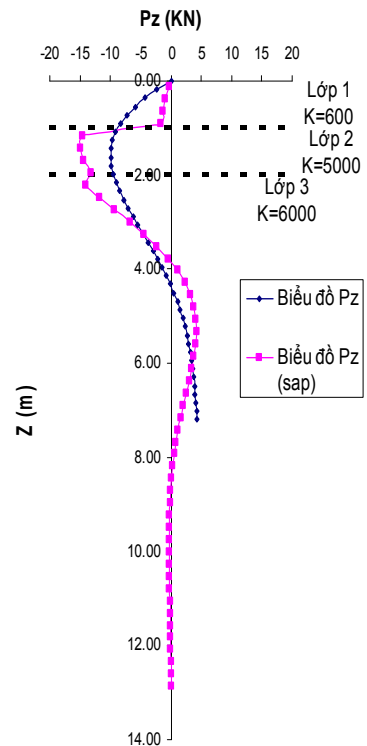
b)



c)



d)



Hình 7: Cọc vuông BTCT chịu lực ngang $Q_0 = 20\text{kN}$ (phương án phân lớp 1) với các biểu đồ:

- Chuyển vị ngang,
- Mô men uốn,
- Lực cắt,
- Phản lực nền.

Bảng 4: So sánh kết quả tính toán ba loại cọc chịu lực ngang trong tám phương án nền phân lớp.

Phương án phân lớp của nền		1	2	3	4	5	6	7	8									
Hệ số tỷ lệ của hệ số nền (kN/m^4)	k_I ($H_I = 1,0\text{m}$)	600	600	1500	3000	1500	3000	5000	5000									
	k_{II} ($H_{II} = 1,0\text{m}$)	5000	1500	3000	5000	600	1500	3000	1500									
	k_{III}	6000	3000	5000	8000	3000	5000	8000	3000									
	$K_{tr,b}$ theo loại cọc	Vuông BTCT	2585,17	1130,86	2336,6	4175,8	1344,86	2693,26	4623,13	3642,02								
		Ống thép	3092,64	1365,78	2677,53	4635,89	1504,68	2909,03	4944,56	3740,69								
Ống BTCTUST		3297,89	1467,54	2824,05	4846,63	1582,88	3016,28	5102,94	3413,34									
Chuyển vị ngang tại mặt đất (mm)	Cọc vuông BTCT	<u>NPL</u>	<u>4,632</u>	-14	<u>7,271</u>	-20	<u>5,141</u>	-9	<u>3,834</u>	-4	<u>7,423</u>	-6	<u>5,156</u>	-0,2	<u>3,784</u>	+1	<u>4,685</u>	+8
		<u>NĐN</u>	5,297	(%)	8,699	(%)	5,628	(%)	3,989	(%)	7,840	(%)	5,168	(%)	3,737	(%)	4,312	(%)
	Cọc ống thép	<u>NPL</u>	<u>4,796</u>	-13	<u>7,510</u>	-19	<u>5,423</u>	-10	<u>4,105</u>	-4	<u>7,769</u>	-8	<u>5,579</u>	-1	<u>4,176</u>	+1	<u>5,650</u>	+10
		<u>NĐN</u>	5,454	(%)	8,906	(%)	5,946	(%)	4,278	(%)	8,403	(%)	5,658	(%)	4,112	(%)	5,089	(%)
	Cọc ống BTCTUST	<u>NPL</u>	<u>4,179</u>	-17	<u>6,546</u>	-22	<u>4,730</u>	-14	<u>3,580</u>	-9	<u>6,776</u>	-12	<u>4,869</u>	-3	<u>3,646</u>	-3	<u>4,961</u>	+3
		<u>NĐN</u>	4,899	(%)	7,964	(%)	5,377	(%)	3,889	(%)	7,610	(%)	5,169	(%)	3,770	(%)	4,799	(%)
Mô men uốn lớn nhất trong cọc (kNm)	Cọc vuông BTCT	<u>NPL</u>	<u>31,583</u>	+13	<u>36,596</u>	+11	<u>31,572</u>	+11	<u>27,990</u>	+10	<u>36,157</u>	+13	<u>30,351</u>	+7	<u>26,340</u>	+7	<u>24,622</u>	-4
		<u>NĐN</u>	27,584	(%)	32,562	(%)	28,157	(%)	25,103	(%)	31,380	(%)	27,392	(%)	24,579	(%)	25,672	(%)
	Cọc ống thép	<u>NPL</u>	<u>94,905</u>	+9	<u>111,653</u>	+9	<u>98,306</u>	+9	<u>88,629</u>	+9	<u>113,261</u>	+12	<u>98,665</u>	+10	<u>87,852</u>	+10	<u>85,763</u>	+1
		<u>NĐN</u>	86,411	(%)	101,392	(%)	89,450	(%)	80,319	(%)	99,454	(%)	87,981	(%)	79,292	(%)	84,480	(%)
	Cọc ống BTCTUST	<u>NPL</u>	<u>95,851</u>	+11	<u>112,822</u>	+11	<u>99,477</u>	+11	<u>89,746</u>	+11	<u>114,531</u>	+13	<u>99,902</u>	+11	<u>89,043</u>	+11	<u>87,283</u>	+3
		<u>NĐN</u>	85,519	(%)	100,273	(%)	88,587	(%)	79,672	(%)	99,576	(%)	87,392	(%)	78,829	(%)	84,840	(%)

III. Phương pháp Năm mô men gần đúng

3.1 Ý tưởng cơ bản về Phương pháp Năm mô men gần đúng

Ở mục trước ta đã thấy rõ khả năng to lớn của Phương pháp Năm mô men đối với việc giải nhiều lớp bài toán dầm trên gối đàn hồi cục bộ. Trong quá trình tính toán thực hành ta lại nhận thấy điều sau đây:

Các hệ số của ẩn số δ_{ij} theo (4) được xác định tương đối dễ dàng vì các lực đặt ở vị trí gối tựa trong hệ cơ bản. Trái lại, các số hạng tự do Δ_{ip} theo (5) thì do các tải trọng ngoài khác nhau tác dụng trên nhịp nên tính toán số hạng Δ_{ip}^d phức tạp. Giá trị Δ_{ip}^d sẽ triệt tiêu khi mà trên hệ cơ bản chỉ có các lực tập trung thẳng đứng đặt tại vị trí gối tựa. Với ý tưởng trên, có thể xây dựng Phương pháp Năm mô men gần đúng trên cơ sở của Phương pháp Năm mô men. Để lời giải của Phương pháp Năm mô men gần đúng có thể chấp nhận được, cần phải giải quyết hai vấn đề cơ bản đối với mỗi loại tải trọng ngoài: lực phân bố đều, lực tập trung thẳng đứng và mô men tập trung, đó là:

1. Cách quy đổi tải trọng bất kỳ tác dụng trên nhịp dầm về các lực tập trung thẳng đứng đặt tại gối tựa đàn hồi, và

2. Cách tính chuyển vị – nội lực trong tiết diện bất kỳ của dầm.

3.2 Trường hợp tải trọng phân bố đều:

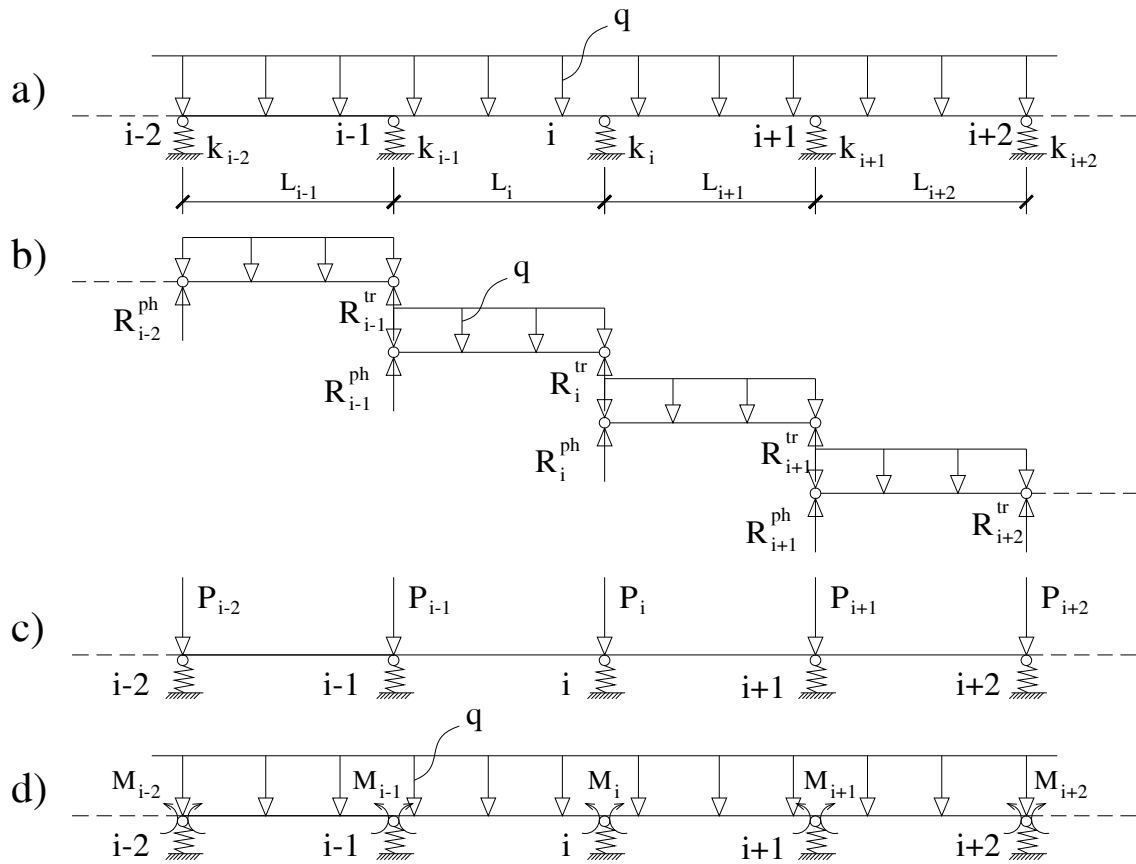
1. Cách quy đổi tải trọng:

Dầm liên tục nhiều nhịp trên các gối đàn hồi (H. 8a) được tách thành các dầm đơn giản chịu chính tải trọng đó để tính phản lực gối tựa (H. 8b). Hình 8c biểu diễn các lực tập trung thẳng đứng đặt tại gối i khi dầm chịu tải theo sơ đồ Hình 8a sẽ là:

$$P_i = R_i^{tr} + R_i^{ph}$$

2. Các công thức tính chuyển vị – nội lực:

Phản lực gối tựa:



Hình 8: Các sơ đồ tính toán đối với tải trọng phân bố đều

- Dầm trên gối đàn hồi chịu tải phân bố đều q ;
- Rời rạc hóa dưới dạng dầm đơn giản;
- Dầm chịu lực quy đổi tại gối;
- Sơ đồ tính chuyển vị – nội lực tại một tiết diện bất kỳ của dầm.

Gối tựa biên trái:

$$R_0 = \frac{M_1}{L_1} + \frac{1}{2}qL_1$$

Gối tựa trung gian:

$$R_i = \frac{M_{i-1}}{L_i} - M_i \left(\frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) + \frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} + \frac{1}{2}q(L_i + L_{i+1}) \quad (10)$$

Gối tựa biên phải:

$$R_n = \frac{M_{n-1}}{L_n} + \frac{1}{2}qL_n$$

Chuyển vị thẳng đứng tại gối tựa:

$$y_i = k_i R_i \quad (11)$$

Mômen uốn trong các nhịp dầm:

Nhịp biên trái:

$$M(x_1) = -x_1^2 + \left(\frac{M_1}{L_1} + \frac{1}{2} q L_1 \right) x_1$$

Nhịp trung gian:

$$M(x_i) = -\frac{1}{2} q x_i^2 + \left(\frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} + \frac{1}{2} q L_i \right) x_i + M_{i-1} \quad (12)$$

Nhịp biên phải:

$$M(x_n) = -\frac{1}{2} q x_n^2 + \left(-\frac{M_{n-1}}{L_n} + \frac{1}{2} q L_n \right) x_n + M_{n-1}$$

Lực cắt:

Gối tựa biên trái:

$$Q_0^{\text{ph}} = \frac{M_1}{L_1} + \frac{1}{2} q L_1$$

Gối tựa trung gian:

$$Q_i^{\text{tr}} = \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} - \frac{1}{2} q L_i$$

$$Q_i^{\text{ph}} = \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}} + \frac{1}{2} q L_{i+1}$$

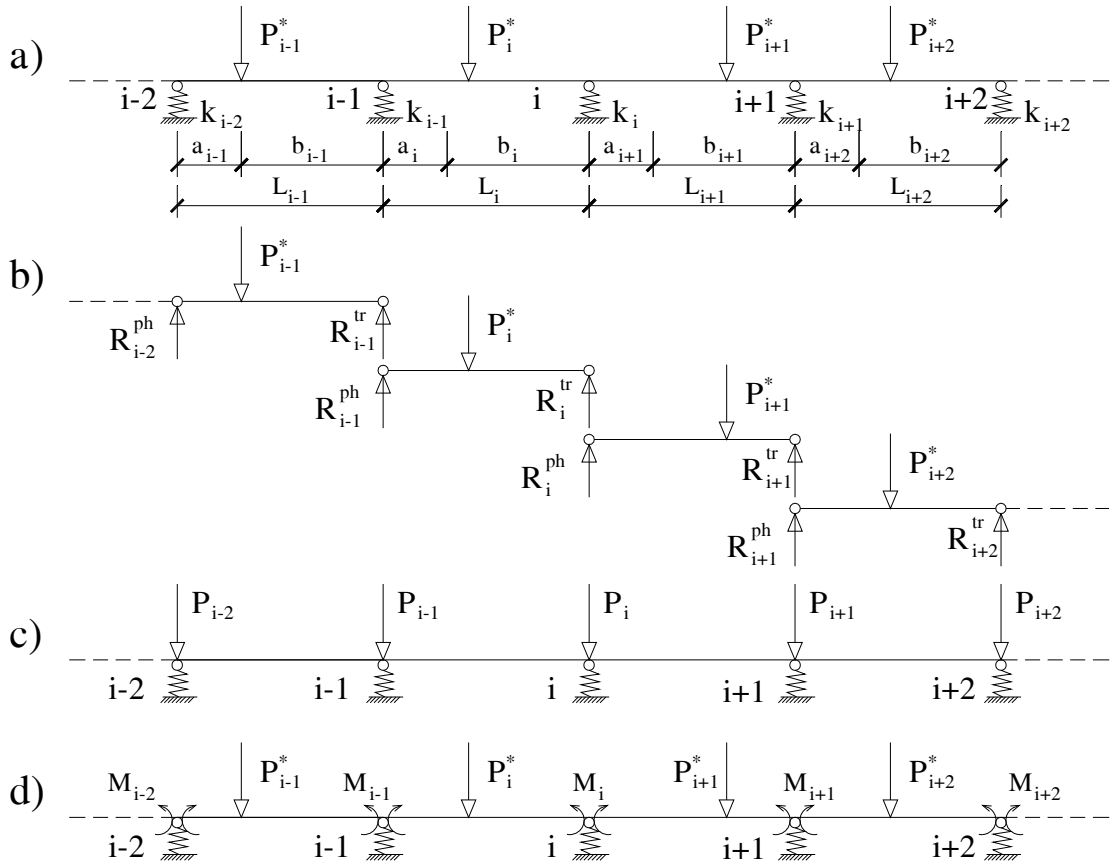
Gối tựa biên phải:

$$Q_n^{\text{tr}} = -\frac{M_{n-1}}{L_n} - \frac{1}{2} q L_n$$

Hai trường hợp tải trọng ngoài còn lại sẽ được sử dụng các ký hiệu ở mục này mà không chú giải.

3.3 Trường hợp tải trọng tập trung thẳng đứng:

1. Cách quy đổi tải trọng:



Hình 9: Các sơ đồ tính toán đối với tải trọng tập trung thẳng đứng.

- Dầm trên gối đàn hồi chịu tải tập trung;
- Rời rạc hóa dưới dạng dầm đơn giản;
- Dầm chịu lực quy đổi tại gối;
- Sơ đồ tính chuyển vị – nội lực tại một tiết diện bất kỳ của dầm.

Hoàn toàn giống như trường hợp tải trọng phân bố đều, cách thức quy đổi tải trọng được mô tả cụ thể trên Hình 9. Cuối cùng, lực P_i trên Hình 9c vẫn tính theo (9).

2. Các công thức tính chuyển vị – nội lực:

Phản lực gối tựa:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{L_1}(M_1 + P_1 b_1) \\ R_i &= \frac{M_{i-1}}{L_i} - M_i \left(\frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) + \frac{P_i a_i}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}}(M_{i+1} + P_{i+1} b_{i+1}) \\ R_n &= \frac{1}{L_n}(M_{n-1} + P_n a_n) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Mô men uốn tại các vị trí đặt ngoại lực (H. 9d):

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{a_1}{L_1}(P_1 b_1 + M_1) \\ M_i &= \frac{1}{L_i}(P_i a_i b_i + M_{i-1} b_i + M_i a_i) \\ M_n &= \frac{b_n}{L_n}(P_n a_n + M_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Lực cắt tại các vị trí đặt ngoại lực (H. 9d):

$$\left. \begin{aligned} Q_1^r &= \frac{1}{L_1}(M_1 + P_1 b_1) \\ Q_1^{ph} &= \frac{1}{L_1}(M_1 - P_1 a_1) \\ Q_i^r &= \frac{1}{L_i}(M_i + P_i b_i - M_{i-1}) \\ Q_i^{ph} &= \frac{1}{L_i}(M_i - P_i a_i - M_{i-1}) \\ Q_n^r &= \frac{1}{L_n}(P_n b_n - M_{n-1}) \\ Q_n^{ph} &= \frac{1}{L_n}(P_n a_n + M_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

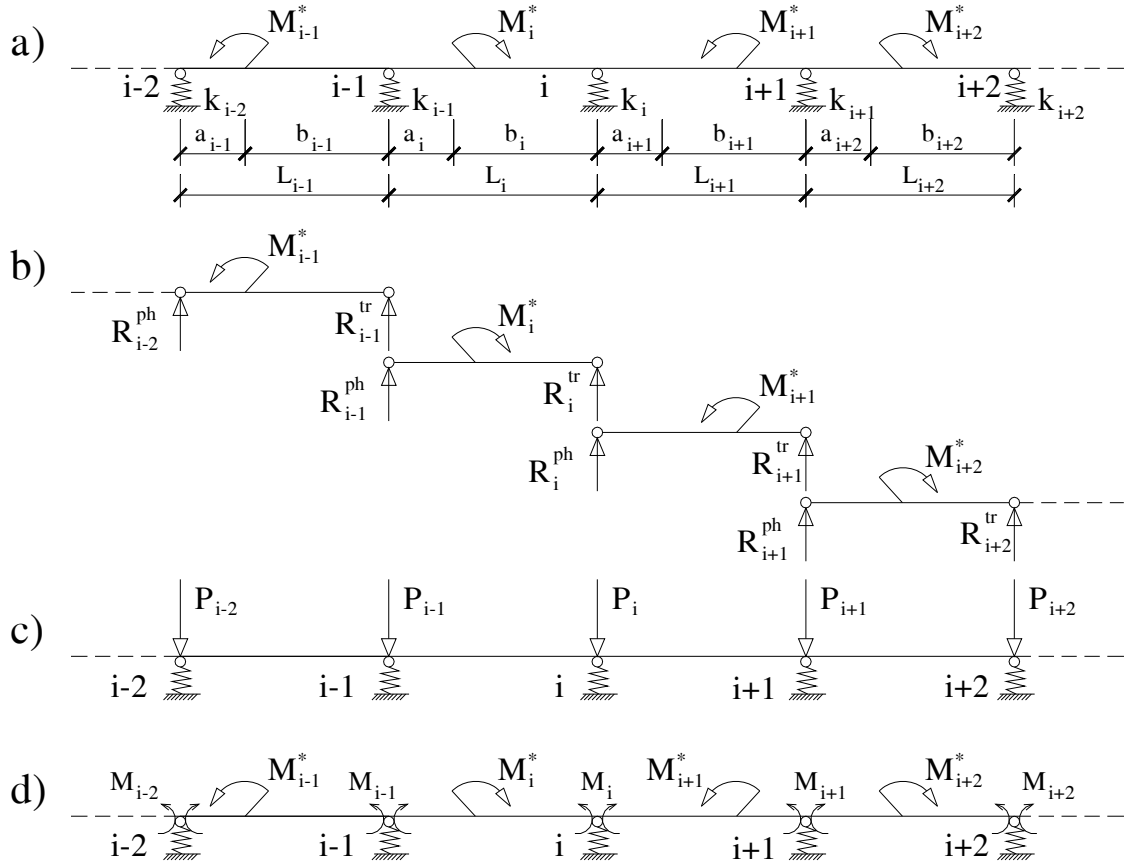
Lực cắt tại các gối tựa:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{L_1}(M_1 + P_1 b_1) \\ Q_i^r &= \frac{1}{L_{i+1}}(P_{i+1} b_{i+1} + M_{i+1} - M_i) \\ Q_i^{ph} &= \frac{1}{L_i}(M_i - M_{i-1} - P_i a_i) \\ Q_n &= -\frac{1}{L_n}(P_n a_n + M_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3.4 Trường hợp mô men tập trung:

1. Cách quy đổi tải trọng:

Trong trường hợp này, tại mỗi dầm giản đơn (H. 9b), các phản lực gối tựa tạo ra một ngẫu lực cân bằng với mô men ngoại lực tập trung tác dụng trên dầm đó. Và, như thế, lực quy đổi P_i (xem H. 10c) vẫn tính theo (9).



Hình 10: Các sơ đồ tính toán đối với mô men tập trung

- Dầm trên gối đàn hồi chịu các mô men tập trung;
- Rời rạc hóa dưới dạng dầm giản đơn;
- Dầm chịu lực quy đổi tại gối;
- Sơ đồ tính toán chuyển vị – nội lực tại một tiết diện bất kỳ của dầm.

2. Các công thức tính chuyển vị – nội lực:

Phản lực gối tựa:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{L_1} (M_1^* + M_1) \\ R_1 &= \frac{1}{L_i} (M_{i-1} - M_i^*) - M_i \left(\frac{1}{L_i} + \frac{1}{L_{i+1}} \right) + \frac{1}{L_{i+1}} (M_{i+1}^* + M_{i+1}) \\ R_n &= \frac{1}{L_n} (M_{n-1} - M_n^*) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

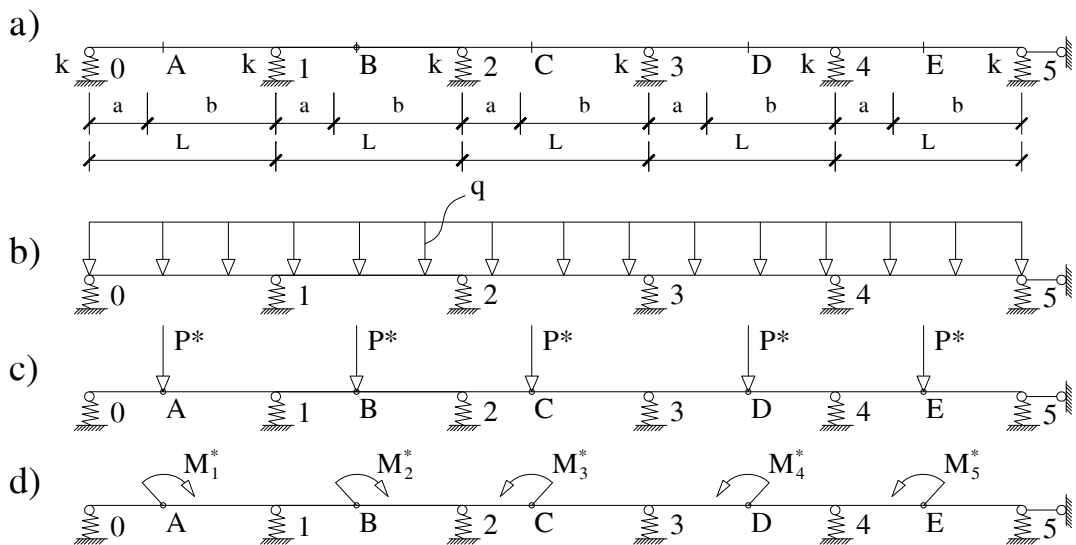
Mô men uốn tại các vị trí đặt Mô men ngoại lực tập trung:

$$\left. \begin{aligned}
 M_1^{\text{tr}} &= \frac{a_1}{L_1} (M_1^* + M_1) \\
 M_1^{\text{ph}} &= M_1^{\text{tr}} - M_1^* \\
 M_i^{\text{tr}} &= M_{i-1} - \frac{a_i}{L_i} (M_{i-1} - M_i - M_i^*) \\
 M_i^{\text{ph}} &= M_{i-1} - M_i^* - \frac{a_i}{L_i} (M_{i-1} - M_i - M_i^*) \\
 M_n^{\text{tr}} &= \frac{b_n}{L_n} (M_{n-1} + M_n^*) \\
 M_n^{\text{ph}} &= M_n^{\text{tr}} + M_n^*
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Lực cắt trong nhịp dầm:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{1}{L_1} (M_1^* + M_1) \\
 Q_i &= \frac{1}{L_i} (M_i + M_i^* - M_{i-1}) \\
 Q_n &= \frac{1}{L_n} (M_n^* - M_{n-1})
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

3.5 Ví dụ:



Hình 11: Các sơ đồ của ví dụ ứng dụng phương pháp Năm mô men gần đúng.

- Sơ đồ kết cấu,
- Dầm chịu tải phân bố đều $q = 50\text{kN/m}$,
- Dầm chịu tải trọng tập trung $P^* = 100\text{kN}$,
- Dầm chịu tải mô men tập trung:

$$M_1^* = M_3^* = M_5^* = 500\text{kNm.}$$

$$M_2^* = M_4^* = 1000\text{kNm.}$$

1. Đầu bài: cho một dầm liên tục có nhịp và độ cứng các gối đàn hồi bằng nhau: $L = 1,0\text{m}$; $a = b = 0,5\text{m}$ và $k = 3,33.10^{-5} \text{ m/kN}$; độ cứng chống uốn $EI = 2,1.106 \text{ kNm}^2$. Hãy so sánh kết quả giữa Phương pháp Năm mô men gần đúng với Phương pháp Năm mô men khi dầm chịu tải phân bố, lực thẳng đứng tập trung và mô men tập trung trên nhịp (H. 11b, c và d).

2. Giải:

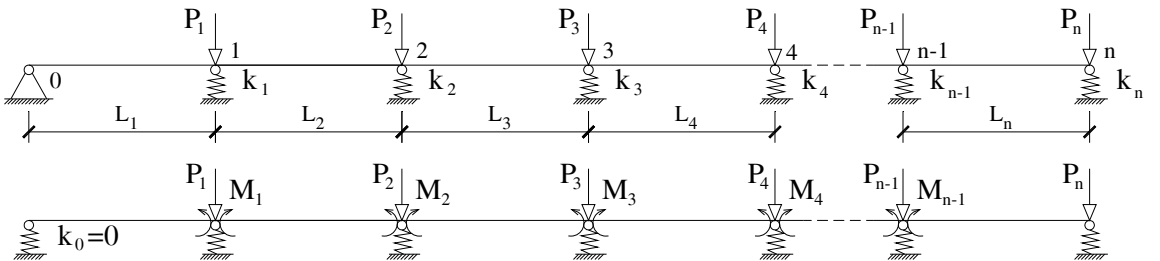
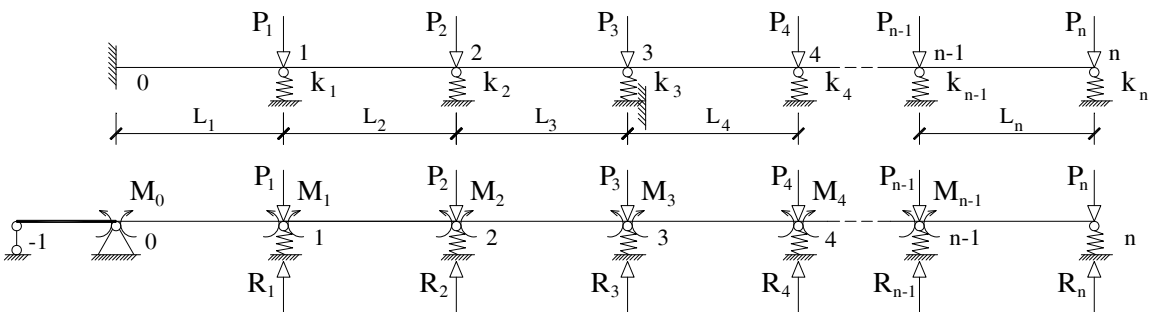
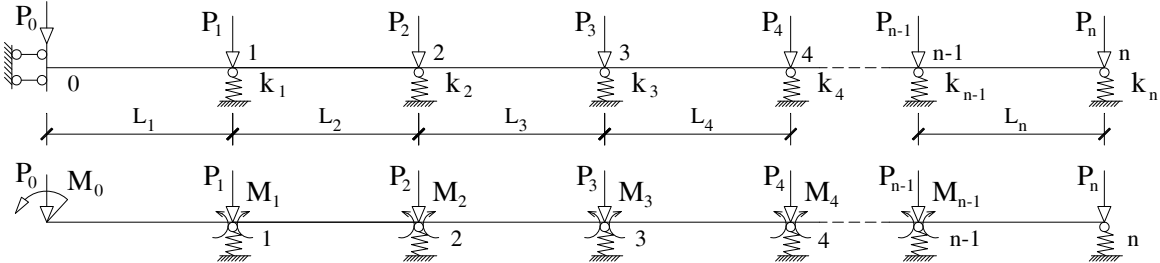
Như đã biết, ở Phương pháp Năm mô men, bài toán này có 4 ẩn số mô men gối: M_1, M_2, M_3 và M_4 với các hệ số của số δ_{ij} giống nhau, chỉ có các số hạng tự do Δ_{ip} là khác nhau. Điều đó dẫn đến kết quả sai khác nhau như ở bảng 5.

Bảng 5: So sánh kết quả tính

Đại lượng		Phương pháp Năm mô men	Phương pháp Năm mô men gần đúng	Nhận xét
Dầm chịu tải phân bố đều	Δ_{1p}	$-8,305.10^{-4}$	$-8,325.10^{-4}$	Sai khác rất nhỏ
	Δ_{2p}	$1,986.10^{-6}$	0,0	
	Δ_{3p}	$1,986.10^{-6}$	0,0	
	Δ_{4p}	$-8,305.10^{-4}$	$-8,325.10^{-4}$	
	M_1	16,03	16,12	Sai khác nhỏ
	M_2	23,82	24,0	
	M_3	23,82	24,0	
	M_4	16,03	16,12	
Dầm chịu lực tập trung thẳng đứng	Δ_{1p}	$-1,659.10^{-3}$	$-1,665.10^{-3}$	Sai khác rất nhỏ
	Δ_{2p}	$5,925.10^{-6}$	0,0	
	Δ_{3p}	$5,925.10^{-6}$	0,0	
	Δ_{4p}	$-1,659.10^{-3}$	$1,665.10^{-3}$	
	M_1	31,95	32,24	Sai khác nhỏ
	M_2	47,46	47,98	
	M_3	47,46	47,98	
	M_4	31,95	32,24	
Dầm chịu mô men tập trung	Δ_{1p}	0,066	0,0666	Bằng nhau
	Δ_{2p}	-0,0999	-0,0999	
	Δ_{3p}	0,0	0,0	
	Δ_{4p}	0,0333	0,0333	
	M_1	543,01	543,01	Bằng nhau
	M_2	1633,43	1633,43	
	M_3	1262,59	1262,59	
	M_4	401,16	401,16	

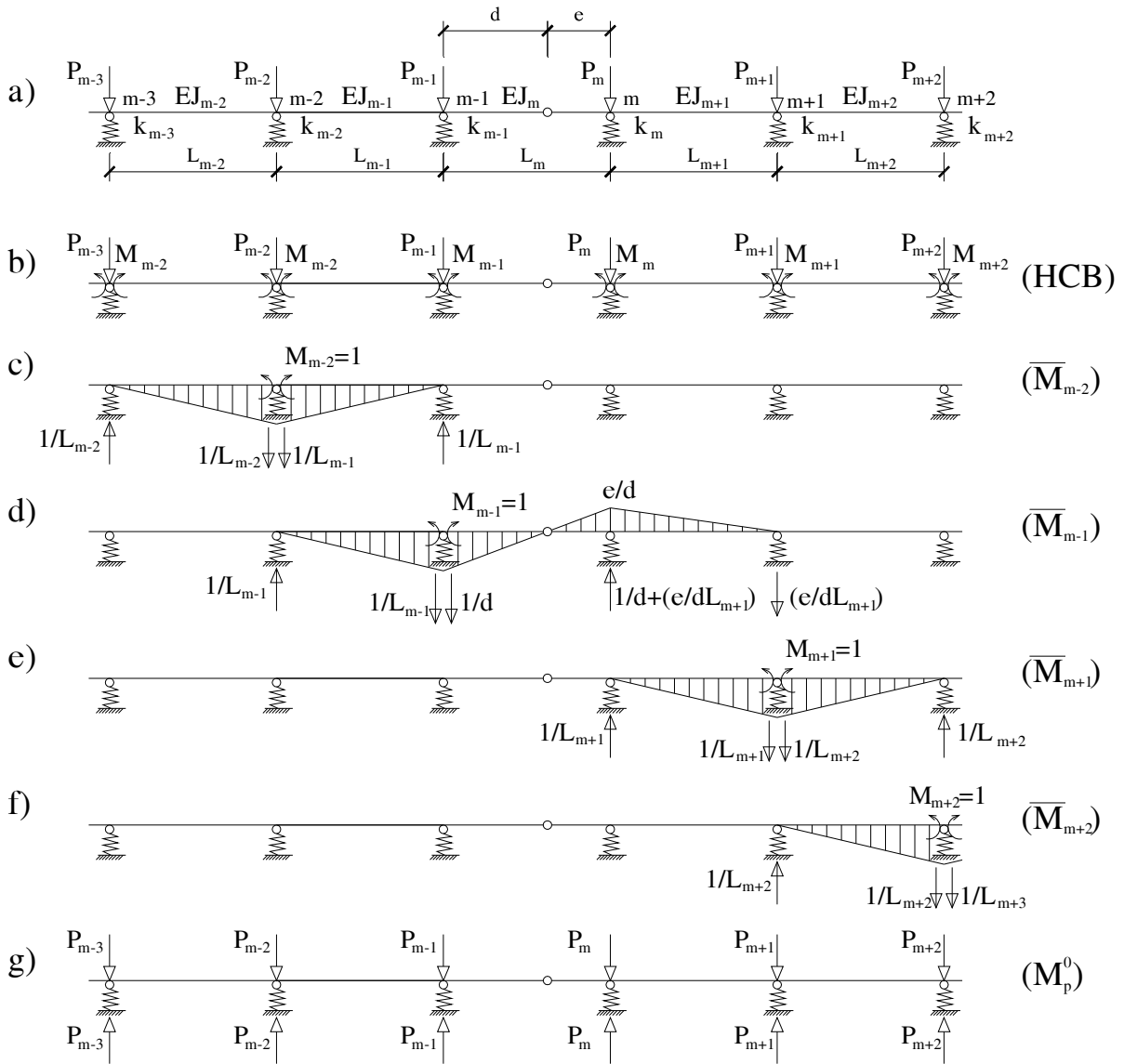
IV. Công thức tính dầm có liên kết (xem bảng 6):

Bảng 6: Sơ đồ và công thức khi đầu dầm có liên kết

Liên kết đầu dầm	Công thức riêng
<p>4.1 Gối tựa cứng: Hình 13</p> 	<p>Trong các công thức (2) và (3): $k_0 = 0$</p> $\left. \begin{aligned} \delta_{00} &= \frac{L_1}{3EI_1} + \frac{k_1}{L_1^2} \\ \delta_{01} = \delta_{10} &= \frac{L_1}{6EI_1} - \frac{k_1}{L_1} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \\ \delta_{11} &= \frac{L_1}{3EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} + k_1 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^2 + \frac{k_2}{L_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$
<p>4.2 Ngàm cứng: Hình 14</p> 	$\left. \begin{aligned} \Delta_{0p} &= -\frac{k_1}{L_1} P_1 \\ \Delta_{1p} &= +k_1 P_1 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) - \frac{k_2}{L_2} P_2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$ $\left. \begin{aligned} \delta_{00} &= \frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} + \frac{1}{L_2^2} (k_1 + k_2) \\ \delta_{02} = \delta_{20} &= -\frac{L_2}{6EI_2} + \frac{k_1}{L_2^2} + \frac{k_2}{L_2} \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \\ \delta_{03} = \delta_{30} &= -\frac{k_2}{L_2 L_3} \end{aligned} \right\} \quad (23)$
<p>4.3 Ngàm trượt: Hình 15</p> 	$\left. \begin{aligned} \Delta_{0p} &= \frac{P_0 L_1^2}{2EI_1} + \frac{P_0 L_1 L_2}{3EI_2} + k_1 \frac{R_1}{L_2} - k_2 \frac{R_2}{L_2} \\ \Delta_{2p} &= -\frac{P_0 L_1 L_2}{6EI_2} + k_1 \frac{R_1}{L_2} - k_2 R_2 \left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$ $\left. \begin{aligned} R_1 &= P_0 \left(1 + \frac{L_1}{L_2} \right) + P_1 \\ R_2 &= P_2 - P_0 \frac{L_1}{L_2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$

V. Tính dầm có khớp bằng phương pháp Năm mô men gần đúng:

5.1 Dầm tựa tự do có khớp:



Hình 12: Các sơ đồ tính toán dầm có khớp theo Phương pháp Năm mô men gần đúng.

- a. Sơ đồ dầm liên tục có khớp ở nhịp trung gian m ;
- b. Hệ cơ bản;
- c. đến g. Các biểu đồ mô men đơn vị và mô men ngoại lực trên hệ cơ bản.

Dầm liên tục trên gối đàn hồi không có liên kết hai đầu biên được gọi là dầm tựa tự do và là bài toán cơ bản, đơn giản nên được xét đầu tiên.

Giả sử khớp nằm ở nhịp trung gian thứ m , cách gối tựa $m-1$ bằng d và cách gối tựa m bằng e (H. 12a). Hệ cơ bản của phương pháp lực như hình 12b. Vẽ các biểu đồ mô men đơn vị (H. 12c, d, e, f) và biểu đồ mô men ngoại lực trên hệ cơ bản (H. 12g) rồi dùng công thức Maxwell – Morh tìm các hệ số của ẩn số δ_{ij} cũng như số hạng tự do Δ_{ip} :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{(m-2)(m-1)} &= \frac{L_{m-1}}{6(EI)_{m-1}} - \frac{1}{L_{m-1}} \left[k_{m-2} \left(\frac{1}{L_{m-2}} + \frac{1}{L_{m-1}} \right) + k_{m-1} \left(\frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{d} \right) \right] \\ \delta_{(m-1)(m-1)} &= \frac{L_{m-1}}{3(EI)_{m-1}} + \frac{1}{3(EI)_m} \left(d + \frac{e^3}{d^2} \right) + \frac{L_{m+1}}{3(EI)_{m+1}} \left(\frac{e}{d} \right)^2 + \frac{k_{m-2}}{L_{m-1}^2} + \\ &+ k_{m-1} \left(\frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{d} \right)^2 + \frac{k_m}{d^2} \left(1 + \frac{e}{L_{m+1}} \right)^2 + \frac{k_{m+1}}{L_{m+1}^2} \left(\frac{e}{d} \right)^2 \\ \delta_{(m-1)(m+1)} &= -\frac{L_{m+1}}{6(EI)_{m+1}} \left(\frac{e}{d} \right) + \frac{1}{dL_{m+1}} \left[k_m \left(1 + \frac{e}{L_{m+1}} \right) + ek_{m+1} \left(\frac{1}{L_{m+1}} + \frac{1}{L_{m+2}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

và:

$$\Delta_{(m-1)p} = \frac{k_{m-2}R_{m-2}}{L_{m-1}} - k_{m-1}R_{m-1} \left(\frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{d} \right) + \frac{k_m R_m}{d} \left(1 + \frac{e}{L_{m+1}} \right) - \frac{k_{m-2}R_{m+1}}{L_{m+1}} \left(\frac{e}{d} \right) \quad (27)$$

Sau khi thu được các mô men gối tựa M_i , giá trị các phản lực gối chịu ảnh hưởng của khớp được xác định bởi:

$$\left. \begin{aligned} R_{m-1} &= P_{m-1} + \frac{M_{m-2}}{L_{m-1}} - M_{m-1} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L_{m-1}} \right) \\ R_m &= P_m + \frac{M_{m-1}}{d} \left(1 + \frac{e}{L_{m+1}} \right) + \frac{M_{m+1}}{L_{m+1}} \\ R_{m+1} &= P_{m+1} - \frac{M_{m-1}}{L_{m+1}} \left(\frac{e}{d} \right) - M_{m+1} \left(\frac{1}{L_{m+1}} + \frac{1}{L_{m+2}} \right) + \frac{M_{m+2}}{L_{m+2}} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Phản lực trong khớp R_{kh} :

$$R_{kh} = -\frac{M_{m-1}}{d} \quad (29)$$

Các công thức từ (26) đến (28) sẽ có dạng đơn giản hơn nhiều nếu một, hai hoặc cả ba đại lượng: độ cứng chống uốn EI , chiều dài nhịp dầm L và độ cứng của gối tựa đàn hồi k có giá trị bằng nhau.

Một điều cần lưu ý nữa là hệ phương trình chính tắc, ở dầm có khớp tại nhịp m sẽ khuyết dòng và cột thứ m .

Mô men tại gối m sẽ được tính qua mô men tại gối m-1 nhờ biểu thức sau:

$$M_m = -M_{m-1} \left(\frac{e}{d} \right) \quad (30)$$

Nếu khớp rơi vào đúng vị trí gối m thì các công thức (26) và (27) trở nên đơn giản hơn nữa. Lúc này, hệ phương trình chính tắc mất hẳn dòng và cột thứ m ($M_m = 0$) còn các hệ số của ẩn số cũng như số hạng tự do thì giống như trường hợp dầm không có khớp (dầm liên tục). Ta sẽ sử dụng nhận xét này để giải các bài toán dầm trên nền đàn hồi.

5.2 Dầm có liên kết và có khớp:

1. Nhận xét chung:

① Từ các công thức (26) và (27) cho thấy, nếu khớp nằm từ nhịp thứ ba trở đi kể từ liên kết thì dầm có liên kết và có khớp tính như dầm tự do có khớp.

② Trường hợp dầm có gối tựa cứng ở mút trái và có khớp thì các công thức (26) và (27) vẫn đúng.

③ Như vậy ta cần phải xây dựng các công thức dạng (26) và (27) cho các trường hợp mút trái dầm có liên kết ngàm cứng và ngàm trượt, còn khớp thì rơi vào nhịp thứ hai.

Và, như đã nói ở mục trước, lúc này hệ phương trình chính tắc sẽ khuyết dòng và cột thứ 3. Mô men gối M_3 sẽ được tính qua mô men gối M_2 theo (30).

2. Dầm liên kết ngàm cứng và có khớp (H. 16):

Hệ phương trình chính tắc chứa n ẩn số (khuyết dòng và cột thứ hai):

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{00}M_0 + \delta_{01}M_1 + \delta_{03}M_3 + \dots + \delta_{0(n-1)}M_{n-1} + \Delta_{0P} = 0 \\ \delta_{10}M_0 + \delta_{11}M_1 + \delta_{13}M_3 + \dots + \delta_{1(n-1)}M_{n-1} + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{30}M_0 + \delta_{31}M_1 + \delta_{33}M_3 + \dots + \delta_{3(n-1)}M_{n-1} + \Delta_{3P} = 0 \\ \dots \\ \delta_{(n-1)0}M_0 + \delta_{(n-1)1}M_1 + \delta_{(n-1)3}M_3 + \dots + \delta_{(n-1)(n-1)}M_{n-1} + \Delta_{(n-1)P} = 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

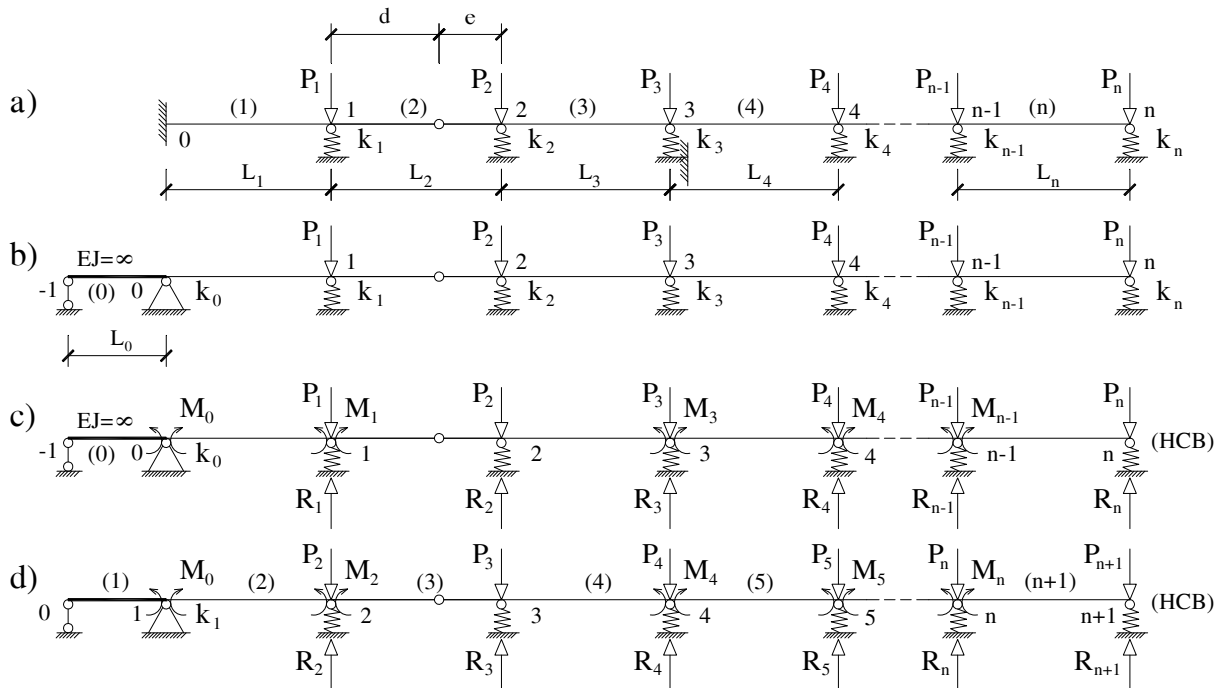
Trong đó:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{01} = \delta_{10} &= \frac{L_1}{6EI_1} - \frac{k_1}{L_1} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{d} \right) \\ \delta_{11} &= \frac{L_1}{3EI_1} + \frac{1}{3EI_2} \left(d + \frac{e^3}{d^2} \right) + \frac{L_3}{3EI_3} \left(\frac{e}{d} \right)^2 + k_1 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{d} \right) + \frac{k_2}{d^2} \left(1 + \frac{e}{L_3} \right) + \frac{k_3}{L_3^2} \left(\frac{e}{d} \right)^2 \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{L_3}{6EI_3} \left(\frac{e}{d} \right) + \frac{1}{L_3 d} \left[k_2 \left(1 + \frac{e}{L_3} \right) + k_3 \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \right) \left(\frac{e}{d} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\Delta_{IP} = -k_1 R_1 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{d} \right) + \frac{k_2}{d} R_2 \left(1 + \frac{e}{L_3} \right) - \frac{k_3}{L_3} R_3 \left(\frac{e}{d} \right) \quad (33)$$

Chú ý: δ_{00} tính theo (21) và

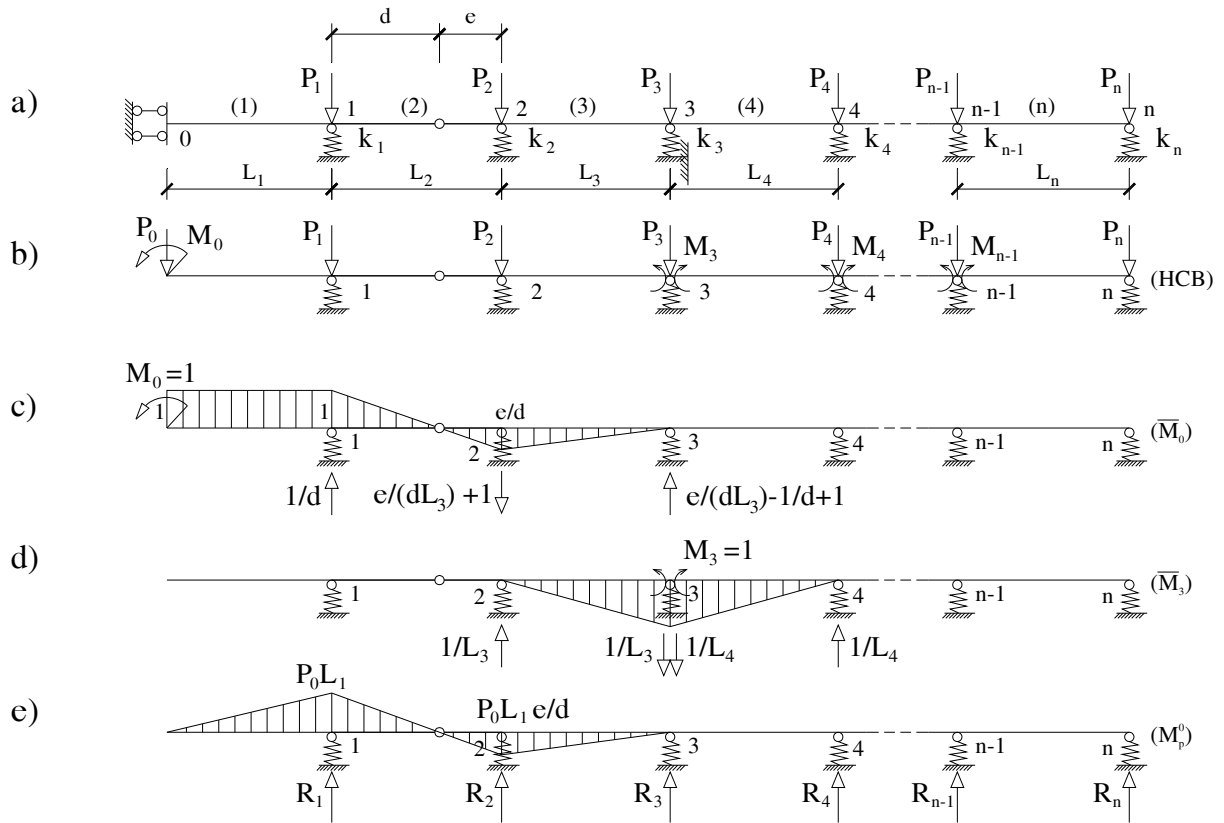
Δ_{0P} theo (22).



Hình 16: Sơ đồ tính toán dầm liên kết ngàm cứng có khớp.

- Sơ đồ kết cấu;
- Sơ đồ kết cấu tương đương;
- Hệ cơ bản của kết cấu tương đương;
- Hệ cơ bản của kết cấu tương đương khi dịch số thứ tự gối về phía trái.

3. Dầm ngàm trượt và có khớp (H. 17)



Hình 17: Sơ đồ tính toán dầm liên kết ngàm trượt có khớp.

- Sơ đồ kết cấu;
- Hệ cơ bản;
- và d. Các biểu đồ mô men đơn vị \bar{M}_0 và \bar{M}_3 ;
- Biểu đồ mô men ngoại lực trên hệ cơ bản.

Lời giải của bài toán này xuất phát từ cách chọn hệ cơ bản của phương pháp lực như ở hình 17b và mô men M_0 sẽ là một trong các ẩn số. Phương trình Năm mô men viết cho gối 0 sẽ có dạng:

$$\delta_{00}M_0 + \delta_{02}M_3 + \Delta_{0P} = 0 \quad (34)$$

Trong đó:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{00} &= \frac{L_1}{EI_1} + \frac{e}{3EI_2} \left[\frac{d}{e} + \left(\frac{e}{d} \right)^2 \right] + \frac{L_3}{3EI_3} \left(\frac{e}{d} \right)^2 + \frac{k_1}{d^2} + k_2 \left[\frac{1}{L_3} \left(\frac{e}{d} \right) + 1 \right]^2 + k_3 \left[\frac{1}{L_3} \left(\frac{e}{d} \right) - \frac{1}{d} + 1 \right]^2 \\ \delta_{03} = \delta_{30} &= \frac{L_3}{6EI_3} \left(\frac{e}{d} \right) + \frac{k_2}{L_3} \left[\frac{1}{L_3} \left(\frac{e}{d} \right) + 1 \right] - k_3 \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \right) \left[\frac{1}{L_3} \left(\frac{e}{d} \right) - \frac{1}{d} + 1 \right] \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{0P} &= \frac{L_1^2 P_0}{2EI_1} + \frac{L_1 P_0}{2EI_2} \left(d + \frac{e^3}{d^2} \right) + \frac{L_1 L_3 P_0}{3EI_3} \left(\frac{e}{d} \right)^2 + k_1 \frac{R_1}{d} - k_2 R_2 \left[\frac{1}{L_3} \left(\frac{e}{d} \right) + 1 \right] + \\ &+ k_3 R_3 \left[\frac{1}{L_3} \left(\frac{e}{d} \right) - \frac{1}{d} + 1 \right] \\ \Delta_{3P} &= \frac{L_1 L_3 P_0}{3EI_3} \left(\frac{e}{d} \right) + k_2 \frac{R_2}{L_3} - k_3 R_3 \left(\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \right) + k_4 \frac{R_4}{L_4} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= P_0 \left(\frac{L_1}{d} + 1 \right) + P_1 \\ R_2 &= P_2 - \frac{L_1 P_0}{d} \left(\frac{e}{L_3} + 1 \right) \\ R_3 &= \frac{L_1}{L_3} P_0 \left(\frac{e}{d} \right) + P_3 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Sau khi thu được các mô men gối tựa, giá trị các phản lực gối của dầm được tính theo (28), riêng phản lực gối 1:

$$R_1 = -\frac{M_1}{d} + P_0 + P_1 \quad (38)$$

5.3 Ví dụ:

1. Ví dụ 1: Dầm tựa tự do

Dầm tựa tự do có các số liệu cho trên hình 18a sẽ được tính cho 2 trường hợp liên tục và có khớp ở nhịp $m = 3$.

Giải

Trường hợp dầm liên tục

① Hệ phương trình chính tắc:

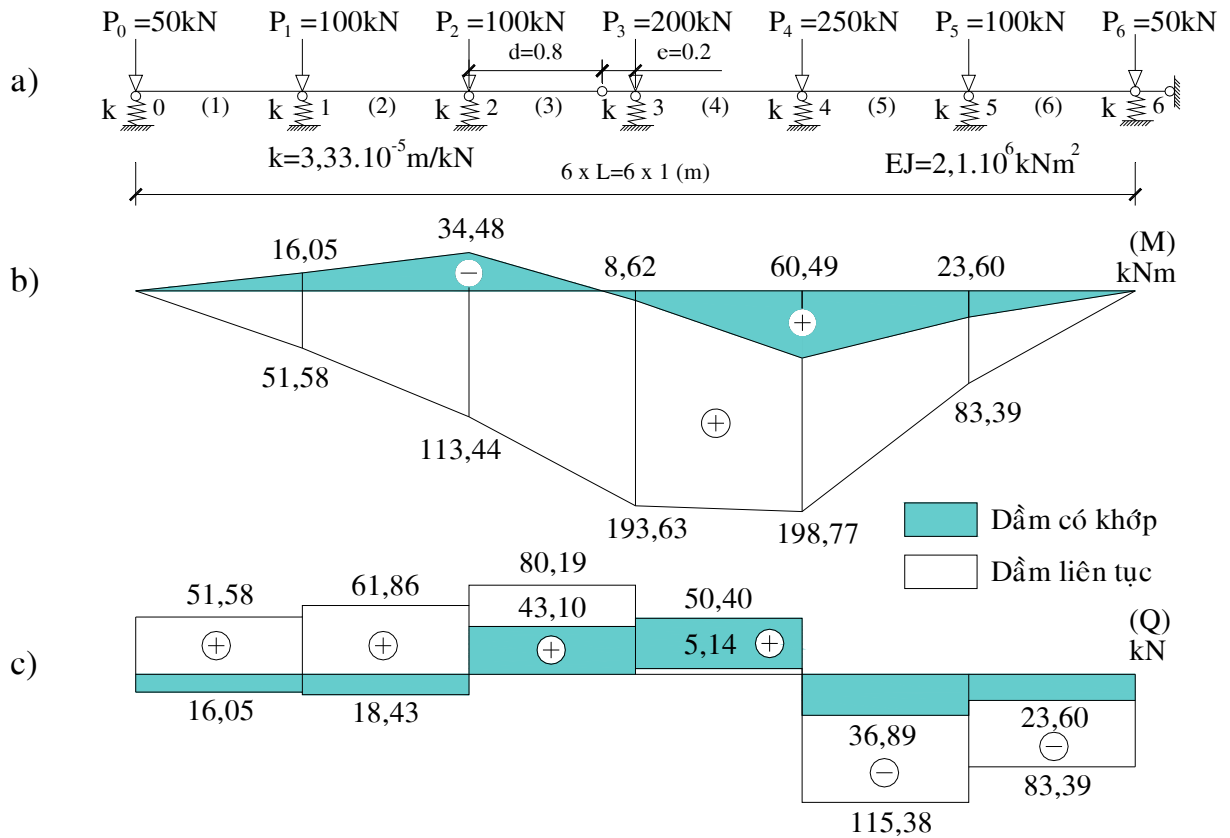
$$\begin{array}{cccccc} \delta_{11}M_1 & + \delta_{12}M_2 & + \delta_{13}M_3 & & & + \Delta_{1P} & = 0 \\ \delta_{21}M_1 & + \delta_{22}M_2 & + \delta_{23}M_3 & + \delta_{24}M_4 & & + \Delta_{2P} & = 0 \\ \delta_{31}M_1 & + \delta_{32}M_2 & + \delta_{33}M_3 & + \delta_{34}M_4 & + \delta_{35}M_5 & + \Delta_{3P} & = 0 \\ & \delta_{42}M_2 & + \delta_{43}M_3 & + \delta_{44}M_4 & + \delta_{45}M_5 & + \Delta_{4P} & = 0 \\ & & \delta_{53}M_3 & + \delta_{54}M_4 & + \delta_{55}M_5 & + \Delta_{5P} & = 0 \end{array}$$

② Các hệ số của ảnh số (rad./kNm):

$$\delta_{13} = \delta_{24} = \delta_{35} = 3,33 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{34} = \delta_{45} = -1,331 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = \delta_{55} = 2 \cdot 10^{-4}$$



Hình 18: Sơ đồ ví dụ 1

- Sơ đồ dầm;
- Biểu đồ mô men;
- Biểu đồ lực cắt.

③ Các số hạng tự do (rad.):

$$\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = -1,665 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_{2P} = \Delta_{5P} = 3,33 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_{4P} = -6,66 \cdot 10^{-3}$$

④ Các mô men gối (kNm):

$$M_1 = 51,58 \quad M_4 = 198,77$$

$$M_2 = 113,44 \quad M_5 = 83,39$$

$$M_3 = 193,63$$

Trường hợp dầm có khớp

① Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{array}{rclcl}
 \delta_{11}M_1 & + \delta_{12}M_2 & & & + \Delta_{1P} & = 0 \\
 \delta_{21}M_1 & + \delta_{22}M_2 & + \delta_{24}M_4 & & + \Delta_{2P} & = 0 \\
 & \delta_{42}M_2 & + \delta_{44}M_4 & + \delta_{45}M_5 & + \Delta_{4P} & = 0 \\
 & & \delta_{54}M_4 & + \delta_{55}M_5 & + \Delta_{5P} & = 0
 \end{array}$$

② Các hệ số của ảnh số (rad./kNm):

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -1,414.10^{-4}$$

$$\delta_{22} = 2,792.10^{-4}$$

$$\delta_{42} = \delta_{24} = 6,658.10^{-5}$$

Các hệ số còn lại không chịu ảnh hưởng của khớp thì tính theo (2):

$$\delta_{45} = \delta_{54} = 3,33.10^{-5}$$

$$\delta_{11} = \delta_{44} = \delta_{55} = 2.10^{-4}$$

③ Các số hạng tự do (rad.) theo (27):

$$\Delta_{1P} = -1,665.10^{-3}$$

$$\Delta_{2P} = 3,746.10^{-3}$$

$$\Delta_{4P} = -6,66.10^{-3}$$

$$\Delta_{5P} = 3,33.10^{-3}$$

④ Các mô men gối (kNm):

$$M_1 = -16,05 \qquad M_4 = 60,49$$

$$M_2 = -34,48 \qquad M_5 = 23,6$$

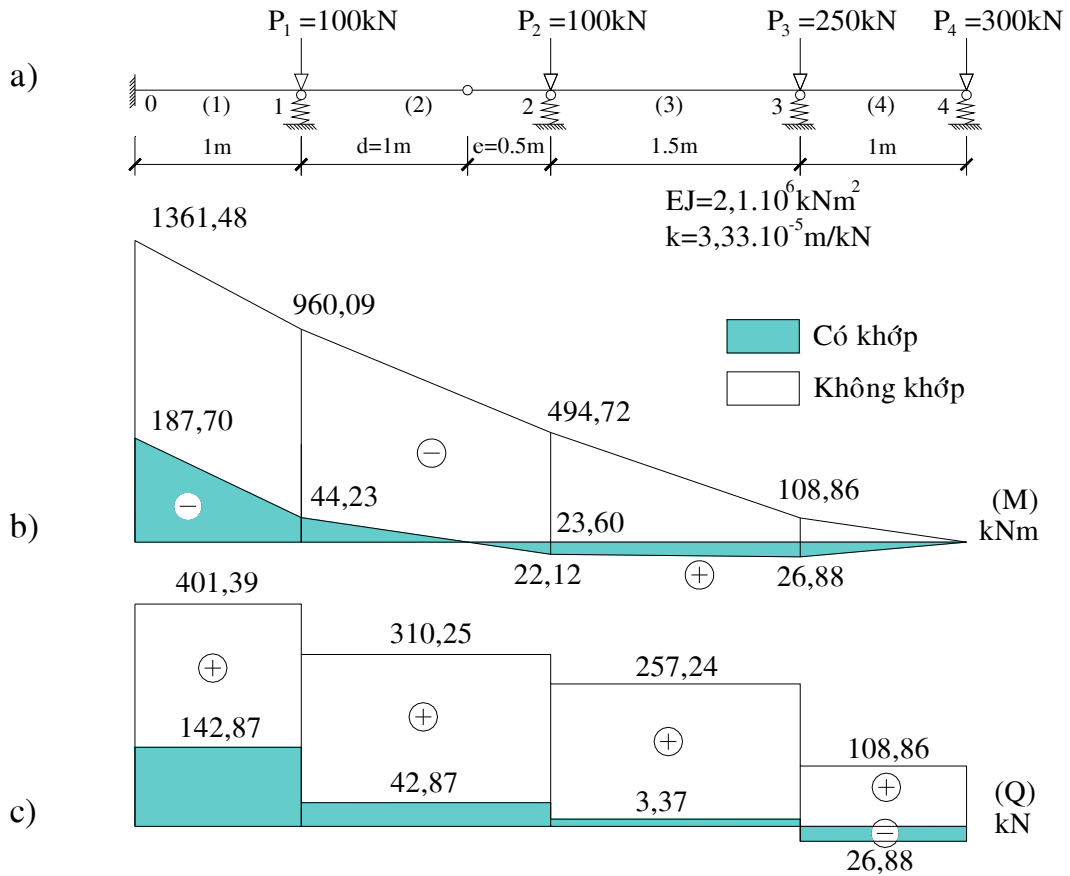
Từ (30): $M_3 = 9,62$ kNm,

Từ (40): $R_k = 43,1$ kN.

Biểu đồ nội lực của dầm trong hai trường hợp được vẽ chap trên H. 18b và c.

2. Ví dụ 2: Dầm liên kết ngàm cứng nút biên trái.

Hình 19a là sơ đồ dầm có các số liệu xuất phát sẽ được tính đối với hai trường hợp: liên tục và có khớp.



Hình 19: Sơ đồ ví dụ 2

- Sơ đồ dầm;
- Biểu đồ mô men;
- Biểu đồ lực cắt.

Trường hợp dầm liên tục

① Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned} \delta_{00}M_0 + \delta_{01}M_1 + \delta_{02}M_2 + \Delta_{0P} &= 0 \\ \delta_{10}M_0 + \delta_{11}M_1 + \delta_{12}M_2 + \delta_{13}M_3 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{20}M_0 + \delta_{21}M_1 + \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31}M_1 + \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned}$$

② Các hệ số của ẩn số chia thành hai nhóm (rad./kNm):

Nhóm chịu ảnh hưởng liên kết ngàm cứng theo (21):

$$\delta_{00} = 3,346 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{01} = \delta_{10} = -5,542 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{11} = 1,077 \cdot 10^{-4}$$

Nhóm không chịu ảnh hưởng liên kết ngàm cứng theo (2):

$$\delta_{20} = \delta_{02} = 1,48.10^{-5}; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = -6,6480.10^{-5}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = -6,648.10^{-5}; \quad \delta_{33} = 1,41.10^{-4}$$

$$\delta_{22} = 8,928.10^{-5}$$

③ Các số hạng tự do (rad.) cũng gồm hai nhóm như trên:

Nhóm thứ nhất tính theo (22):

$$\Delta_{0P} = 3,33.10^{-3}$$

$$\Delta_{1P} = -3,33.10^{-3}$$

Nhóm thứ hai tính theo (3):

$$\Delta_{2P} = 3,33.10^{-3}$$

$$\Delta_{3P} = -1,665.10^{-9}$$

④ Các mô men gối (kNm):

$$M_0 = -1361,48 \quad M_2 = -494,72$$

$$M_1 = -960,09 \quad M_3 = -108,86$$

Trường hợp dầm có khớp

① Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{00}M_0 + \delta_{01}M_1 + \Delta_{0P} = 0$$

$$\delta_{10}M_0 + \delta_{11}M_1 + \delta_{13}M_3 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{31}M_1 + \delta_{33}M_3 + \Delta_{3P} = 0$$

② Các hệ số của ẩn số gồm ba nhóm (rad./kNm):

Nhóm chịu ảnh hưởng bởi liên kết ngàm theo (21):

$$\delta_{00} = 3,346.10^{-5}$$

Nhóm chịu ảnh hưởng của cả liên kết ngàm và khớp tính theo (32):

$$\delta_{01} = \delta_{10} = -6,625.10^{-5}$$

$$\delta_{11} = 1,965.10^{-4}$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = 4,804.10^{-5}$$

Nhóm tự do tính theo (2):

$$\delta_{33} = 1,41.10^{-4}$$

③ Các số hạng tự do (rad.) cũng giống như vậy:

Nhóm chịu ảnh hưởng bởi liên kết ngàm theo (22):

$$\Delta_{0P} = 3,33.10^{-3}$$

Nhóm chịu ảnh hưởng của cả hai yếu tố: ngàm và khớp, tính theo (33):

$$\Delta_{1P} = -4,995.10^{-3}$$

Nhóm không chịu ảnh hưởng gì, theo (3):

$$\Delta_{3P} = -1,665.10^{-3}$$

④ Các mô men gối (kNm):

$$M_0 = -187,1$$

$$M_1 = -44,23$$

$$M_3 = 26,88$$

Từ (30) ta có: $M_2 = 29,49$ kNm.

Từ (29) ta nhận được: $R_k = -44,23$ kN.

Hình 19b và c là biểu đồ mô men và lực cắt trong dầm.

3. Ví dụ 3: Dầm liên kết ngàm trượt mút biên trái.

Dầm có số liệu như ví dụ 2, nhưng có liên kết ngàm trượt ở mút biên trái và cũng tại đó chịu một lực $P_0 = 100$ kN.

Trường hợp dầm liên tục

① Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{00}M_0 + \delta_{02}M_2 + \delta_{03}M_3 + \Delta_{0P} = 0$$

$$\delta_{20}M_0 + \delta_{22}M_2 + \delta_{23}M_3 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{30}M_0 + \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \Delta_{3P} = 0$$

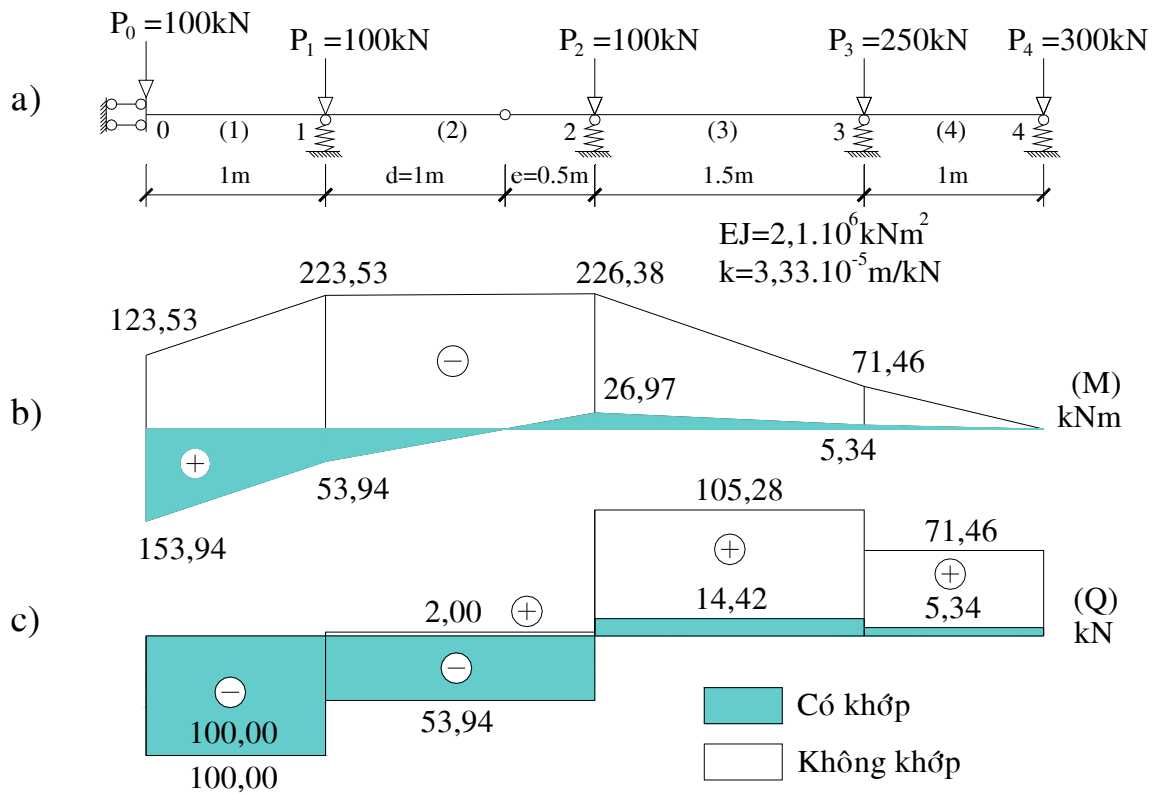
② Các hệ số của ẩn số (rad./kNm):

Nhóm chịu ảnh hưởng của liên kết ngàm trượt, theo (23):

$$\delta_{00} = 3,031.10^{-5}$$

$$\delta_{02} = \delta_{20} = 4,428.10^{-5}$$

$$\delta_{30} = \delta_{03} = -1,48 \cdot 10^{-5}$$



Hình 20: Sơ đồ ví dụ 3

- a. Sơ đồ dầm;
- b. Biểu đồ mô men;
- c. Biểu đồ lực cắt.

Nhóm tự do tính theo (2):

$$\delta_{22} = 8,928 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = -6,648 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_{33} = 1,41 \cdot 10^{-4}$$

③ Các số hạng tự do (rad.):

Nhóm chịu ảnh hưởng của liên kết ngàm trượt, theo (24):

$$\Delta_{0P} = 5,222 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_{2P} = 9,978 \cdot 10^{-3}$$

Nhóm các số hạng tự do theo (3):

$$\Delta_{3P} = -3,145.10^{-3}$$

④ Các mô men gối (kNm):

$$M_0 = 123,53$$

$$M_2 = -226,38$$

$$M_3 = -71,46$$

Mô men gối 1:

$$M_1 = -M_0 - P_0L_1 = -223,53 \text{ kNm.}$$

Trường hợp dầm có khớp

① Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{00}M_0 + \delta_{03}M_3 + \Delta_{0P} = 0$$

$$\delta_{30}M_0 + \delta_{33}M_3 + \Delta_{3P} = 0$$

② Các hệ số của ẩn số (rad./kNm):

Nhóm chịu ảnh hưởng của cả ngàm trượt lẫn khớp, theo (35):

$$\delta_{00} = 9,691.10^{-5}$$

$$\delta_{30} = \delta_{03} = -4,804.10^{-5}$$

Nhóm tự do tính theo (2):

$$\delta_{33} = 1,41.10^{-4}$$

③ Các số hạng tự do (rad.):

Nhóm chịu ảnh hưởng của cả ngàm trượt lẫn khớp, theo (36):

$$\Delta_{0P} = 14,663.10^{-3}$$

$$\Delta_{3P} = -6,463.10^{-3}$$

④ Các mô men gối (kNm):

$$M_0 = -153,94$$

$$M_3 = -5,34$$

Mô men gối 1:

$$M_1 = -M_0 - P_0L_1 = 53,94 \text{ kNm.}$$

Mô men gối 2 theo (30):

$$M_2 = 26,97$$

Phản lực trong khớp theo (29):

$$R_k = 53,94 \text{ kN.}$$

Trên hình 20b và c là biểu đồ mô men và lực cắt trong dầm.

4. Ghi chú:

- ① Liên kết đầu dầm có ảnh hưởng đến nội lực trong dầm;
- ② Khi có khớp, nội lực trong dầm có sự phân bố lại và giá trị giảm nhỏ hơn nhiều khi không có khớp.

Các kết quả này đều đã được kiểm tra bằng lời giải Phương pháp Năm mô men hoặc phần mềm SAP 2000.

VI. Kết luận:

6.1 Năm mô men, trong môn cơ học kết cấu, là phương pháp lực duy nhất để tính dầm liên tục trên gối đàn hồi. Trong hệ phương trình chính tắc, các hệ số của ẩn số cũng như các số hạng tự do có thể được biểu diễn rõ ràng gồm hai thành phần:

- Thành phần chịu ảnh hưởng của dầm.
- Thành phần chịu ảnh hưởng của gối đàn hồi.

Thông qua một số ví dụ cụ thể, cho phép ta nhận biết khả năng rộng lớn của phương pháp Năm mô men đối với việc giải các bài toán về dầm trên gối đàn hồi.

6.2 Trong quá trình thực hành thì phức tạp nhất là tính toán thành phần chịu ảnh hưởng của dầm thuộc số hạng tự do nếu có tải trọng ngoài tác dụng trên nhịp của hệ cơ bản. Điều đó khiến ta nghĩ tới việc triệt tiêu thành phần này bằng cách quy đổi các tải trọng ngoài thành các lực tập trung thẳng đứng tác dụng tại vị trí gối. Lúc này, các hệ số của ẩn số vẫn tính như Năm mô men còn số hạng tự do thì chỉ giữ lại thành phần chịu ảnh hưởng của gối đàn hồi. Với cách làm như thế, để tiện phân biệt, chúng tôi quy ước gọi: Phương pháp Năm mô men gần đúng.

6.3 Nhờ tính đơn giản hơn, phương pháp Năm mô men gần đúng cho phép giải nhiều lớp bài toán của dầm trên gối đàn hồi, dầm tựa tự do có khớp, dầm có liên

kết một hoặc cả hai đầu mút và dầm vừa có liên kết vừa có khớp. Các vấn đề đã được giải quyết, đó là: chọn hệ dầm tương đương, chọn hệ cơ bản hợp lý và thiết lập hệ thống các công thức xác định các hệ số của ẩn số và các số hạng tự do theo công thức tính chuyển vị Maxwell-Morh thông qua việc nhân trực tiếp các biểu đồ mô men.

Kết quả kiểm tra bằng SAP2000 cho thấy hệ thống các công thức đã thiết lập là đúng đắn.

6.4 Nói chung, phương pháp Năm mô men, từ trước đến nay, được biết dường như chỉ và chỉ giải được các bài toán dầm trên gối đàn hồi cục bộ. Và do vậy, Năm mô men cũng tính được các kết cấu dầm trên nền biến dạng đàn hồi cục bộ. Điều đó thật là rõ ràng.

Dựa trên các kết quả đã đạt được, phương pháp Năm mô men gần đúng sẽ phát triển để tính kết cấu dầm trên nền bán không gian đàn hồi và bán không gian đàn hồi biến dạng tuyến tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Lều Thọ Trình: Cơ học kết cấu Tập I và II. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1986.

[2]. Bộ Hàng Hải (Liên Xô cũ): Hướng dẫn thiết kế Công trình Bến Cảng Biển. PD31.31.27-81 Matxcova, V/O “Mortexhinformreklama”, 1984 (Tiếng Nga).

[3]. R.V. Lubenov, F.M.Shikhiev: Công trình Bến Cảng Biển trên nền cọc Reklam InformBjuroMMF, Matxcova, 1976 (Tiếng Nga).

[4]. OCIDI: Technical Standards and Commentaries for Ports and Harbour Facilities in Japan. The oversea Coastal Area Development Institute of Japan, 2002.

[5]. V.N. Udovitrenko, P.I.Jakovlev: Công trình Cảng Sông và Biển, Matxcova “Vận tải”, 1976 (Tiếng Nga)

[6]. K.X.Zavriev, G.X.Shpiro: Tính toán móng sâu trụ cầu, Nhà xuất bản “Vận tải”, Matxcova, 1970 (Tiếng Nga)

[7]. Nguyễn Bá Kế và nh.ng.kh. (biên dịch): Hướng dẫn thiết kế móng cọc. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 1993

[8]. Sổ tay Địa kỹ thuật Trung Quốc, 1994. Phan Văn Thu dịch. (Lưu hành nội bộ: Công ty Khảo sát thuộc TEDI South).

[9]. Đồ án Tốt Nghiệp Kỹ sư Xây dựng Cảng - Đường Thủy – Thêm lục địa Trường Đại học Giao thông Vận tải TP.HCM:

[9a]. Đề tài: “Ứng dụng SAP2000 để nghiên cứu đường ảnh hưởng nội lực dầm ray cần trục trong công trình bến bệ cọc cao mềm”.

Giáo viên hướng dẫn: Phan Dũng.

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Duy.

Khóa: 981 (1998-2003).

[9b]. Đề tài: “Ứng dụng phương pháp Năm mô men để giải một số bài toán cọc và móng cọc”.

Giáo viên hướng dẫn: Phan Dũng.

Sinh viên thực hiện: Trần Nam Hằng.

Khóa: CT02 (2002-2007).

[9c]. Đề tài: “Ứng dụng phương pháp Năm mô men gần đúng để giải một số bài toán dầm trên nền đàn hồi”.

Giáo viên hướng dẫn: Phan Dũng.

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Văn Minh.

Khóa: CT03 (2003-2008).