

# CÁCH TÍNH CÔNG TRÌNH BÊN BỆ CỌC CAO MỀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN ĐỘ CỨNG

Ts. Phan Dũng

## 1. Đặt vấn đề

1.1 Công trình bên (CTB) bê cọc cao mềm là dạng kết cấu bên được dùng nhiều nhất ở nước ta. Các nguyên do chính có thể như sau:

- Đây là loại kết cấu hợp lý nhất đối với điều kiện địa chất công trình vùng ven bờ sông, bờ biển (nơi có lớp đất yếu dày, còn lớp đất tốt thì nằm dưới sâu).
- Phần lớn công việc xây dựng được thực hiện trên nước.
- Chúng ta đã tích lũy được nhiều kinh nghiệm cũng như đã đạt được những thành tựu đáng kể trong thiết kế và thi công.

1.2 Xác định trạng thái chuyển vị - nội lực của CTB bê cọc cao mềm là một bài toán đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều thế hệ các nhà khoa học ở nước ta, Gs. Dương Quang Thành [6], Gs-Ts. Lê Đức Thắng [7], Ks. Đặng Quang Liên [8] và tác giả của bài báo này [9,10,11] đã đề xuất nhiều lời giải khác nhau.

Ngoài ra, các phương pháp tính CTB bê cọc cao mềm quen thuộc của những nhà khoa học Xô Viết cũ: Antonov [4] và của Xcuratov [5] không chỉ có ý nghĩa thực tiễn mà còn là các phương pháp giáo khoa tuyệt vời, bởi chúng được xây dựng từ kiến thức cơ học kết cấu một cách đơn giản, rõ ràng và dễ hiểu.

1.3 Theo hướng đó, bài viết này trình bày cách giải bài toán nêu trên bằng phương pháp ma trận độ cứng. Đây cũng là một lời giải bám sát kiến thức Cơ học kết cấu nhưng được diễn đạt dưới dạng ma trận nên không chỉ tường minh mà còn rất tiện dụng trong điều kiện hiện nay: máy tính và các phần mềm hỗ trợ tính toán rất sẵn.

## 2. Tóm tắt nội dung cơ bản về dạng ma trận của phương pháp chuyển vị [1, 2, 3]

2.1 Nguyên lý công khả dĩ

1. Nguyên lý công khả dĩ là cơ sở cho cách tính hệ đàn hồi theo mô hình chuyển vị, được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^T P &= \tilde{V}^T S & (a) \\ \text{hay: } P^T \tilde{Z} &= S^T \tilde{V} & (b) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \tilde{Z}^T P &= \tilde{V}^T S \\ P^T \tilde{Z} &= S^T \tilde{V} \end{aligned}} \right\} (1)$$

Ở đây:

$P$  = ma trận ngoại lực,

$S$  = ma trận nội lực,

$\tilde{Z}$  = ma trận chuyển vị,

$\tilde{V}$  = ma trận biến dạng khả dĩ,

$T$  = ký hiệu chuyển trí của ma trận.

2. Phát biểu: “Nếu một hệ đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực ấy tính trên những chuyển vị khả dĩ bất kỳ  $T_{mk}$  và công khả dĩ của các nội lực tính trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng  $A_{mk}$  phải bằng không”.

## 2.2 Hệ siêu động và hệ xác định động

### 1. Hệ siêu động

“Hệ siêu động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học (hình học) thì chưa thể xác định được tất cả các chuyển vị tại các nút của hệ, khi đó cần phải dùng thêm điều kiện cân bằng”

### 2. Bậc siêu động

Bậc siêu động  $n_{sd}$  bằng đúng số lượng chuyển vị độc lập chưa biết của tất cả các nút có trong hệ:

$$n_{sd} = n_{đứ} + n_{ng} + n_{xo} \quad (2)$$

Ở đây, các chỉ số dưới được ký hiệu đứ, ng và xo là đứng, ngang và xoay.

### 3. Hệ xác định động:

“Hệ xác định động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức có thể xác định được chuyển vị tại các nút của hệ theo điều kiện hình học”.

Hệ xác định động là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị khi tính hệ siêu động. Hệ cơ bản này có được bằng cách đặt thêm các liên kết để ngăn cản tất cả các chuyển vị thẳng và xoay của hệ siêu động. Như vậy, hệ cơ bản gồm tập hợp các phần tử mẫu dạng dầm một nhịp còn hai đầu có các liên kết khác nhau.

## 2.3 Ma trận độ cứng của các bộ phận kết cấu

1- Ma trận độ cứng của một phần tử mẫu tách riêng thứ  $i$ :

Đối với một phần tử mẫu, ta đã biết quan hệ sau đây giữa nội lực và biến dạng:

$$S_i = k_i \cdot V_i \quad (3)$$

Ở đây:

$S_i$  = ma trận – cột nội lực,

$V_i$  = ma trận – cột biến dạng,

$k_i$  = ma trận độ cứng của phần tử.

2- Ma trận độ cứng của hệ thanh gồm q phần tử:

Đối với hệ thanh gồm q phần tử thì mối liên hệ giữa nội lực và biến dạng là:

$$S = kV \quad (4)$$

Ở đây:

$S$  = ma trận – cột nội lực của hệ,

$V$  = ma trận – cột biến dạng của các phần tử trong hệ,

$k$  = ma trận độ cứng của toàn bộ các phần tử và là một ma trận tựa chéo - vuông - đối xứng, có cấu trúc:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & k_i & \dots & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & k_q \end{bmatrix} \quad (5)$$

“Ma trận độ cứng  $k$  là đặc trưng đàn hồi của kết cấu khi tính theo phương pháp chuyển vị vì nó biểu diễn nội lực qua chuyển vị”.

## 2.4 Ma trận biến dạng

1. Ma trận biến dạng của hệ xác định động gồm q phần tử và n nút.

Khi chịu các chuyển vị cưỡng bức  $Z$  tại các liên kết đặt thêm vào thì trong hệ này sẽ xuất hiện trạng thái biến dạng, được biểu diễn bởi:

$$V = aZ \quad (6)$$

$V$  = ma trận biến dạng, có cấu trúc:

$$V = \{V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_i \quad \dots \quad V_q\} \quad (7)$$

$$V_i = \{\varphi_{0i} \quad \varphi_{1i} \quad \delta_i\} \quad (8)$$

$$Z = \{Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_j \quad \dots \quad Z_n\} \quad (9)$$

$\varphi_{0i}$  và  $\varphi_{1i}$  = các biến dạng góc ở hai đầu thanh,

$\delta_i$  = biến dạng dọc trục tương đối giữa hai đầu thanh,

$a$  = ma trận biến đổi ma trận chuyển vị cưỡng bức  $Z$  thành ma trận biến dạng  $V$ , được gọi là ma trận các góc xoay của tiết diện đầu thanh do chuyển vị đơn vị ở các nút của hệ gây ra.

2. Cấu trúc của ma trận  $a$ :

$$a = \parallel a_{ij} \parallel \quad (10)$$

Trong đó:

$$a_{ij} = \{\bar{\varphi}_{0ij} \quad \bar{\varphi}_{1ij} \quad \bar{\delta}_{ij}\} \quad (11)$$

$\bar{\varphi}_{0ij}, \bar{\varphi}_{1ij}, \bar{\delta}_{ij}$  = biến dạng tại hai đầu cầu kiện do chuyển vị cưỡng bức  $Z = \tilde{Z}=1$  gây ra trong hệ xác định động.

$i$  = số thứ tự phần tử,  $i = 1, 2, \dots, q$ .

$j$  = số thứ tự nút,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

2.5 Ma trận phản lực trong các liên kết đặt thêm vào do chuyển vị cưỡng bức đơn vị gây ra trong hệ xác định động R

Theo nguyên lý công khả dĩ (1a), nếu thay P bằng ma trận phản lực R thì ta có:

$$\tilde{Z}^T R = \tilde{V}^T S$$

Suy ra:  $R = \tilde{V}^T S$  (12)

Ở đây:  $\tilde{V}$  = ma trận biến dạng do chuyển vị khả dĩ  $\tilde{Z}=E$  gây ra ( $E$  = ma trận đơn vị).

Theo (6):  $\tilde{V} = a\tilde{Z} = a$

Suy ra:  $\tilde{V}^T = a^T$  (13)

Thế (13) vào (12), ta nhận được:

$$R = a^T S \quad (14)$$

Ma trận nội lực S theo (4) có thể viết lại nếu chú ý đến (6):

$$S = kaZ \quad (15)$$

Thế (15) vào (14) để có được dạng mới của ma trận phản lực R:

$$R = a^T kaZ \quad (16)$$

Đặt:  $K = a^T ka$ , (17)

thì K được gọi là ma trận độ cứng của hệ thanh, có tính chất sau:

- (1) Các phần tử trong ma trận này chính là các phản lực trong các liên kết đặt thêm vào do hệ lần lượt thực hiện các chuyển vị đơn vị theo phương các liên kết này gây ra. Đây chính là các hệ số của ẩn số trong phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị.
- (2) Đây là một ma trận vuông, các phần tử trên đường chéo chính luôn dương và đối xứng qua đường chéo chính.

## 2.6 Dạng ma trận của hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

Từ điều kiện cân bằng của hệ chịu tác động của tải trọng ngoài bất động, ta có:

$$R + R_{op} = 0 \quad (18)$$

Trong đó:  $R_{op}$  = ma trận phản lực do tải trọng ngoài tác dụng trên hệ cơ bản gây ra tại các liên kết đặt thêm. Đây là ma trận xuất phát thứ ba của phương pháp ma trận độ cứng.

Nếu thế (16) có chú ý (17) vào (18) rồi giải thì ta tìm được ma trận chuyển vị nút của hệ Z:

$$Z = -K^{-1} R_{op} \quad (19)$$

Đem (19) vào (6) ta nhận được ma trận biến dạng của hệ cơ bản:

$$V = -a K^{-1} R_{op} \quad (20)$$

Và sau cùng, thế (20) vào (4) ta thu được ma trận nội lực của hệ:

$$S = -ka K^{-1} R_{op} \quad (21)$$

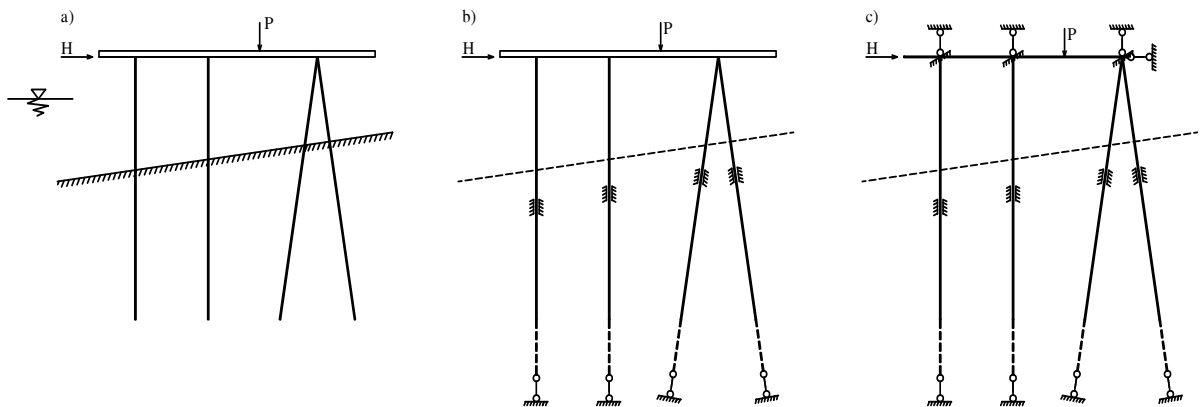
Trên đây là những đẳng thức ma trận cơ bản của phương pháp chuyển vị hay còn được gọi là phương pháp ma trận độ cứng.

## 3. Phương pháp ma trận độ cứng để tính toán chuyển vị nội lực CTB bộ cọc cao mềm

### 3.1 Những vấn đề chung

#### 1. Các sơ đồ tính toán

Xét một CTB bộ cọc cao mềm có sơ đồ kết cấu như hình 1a, gồm nền cọc được nối liền với bộ như một dầm ngang.



Hình 1: Sơ đồ tính toán CTB hệ cọc cao mềm

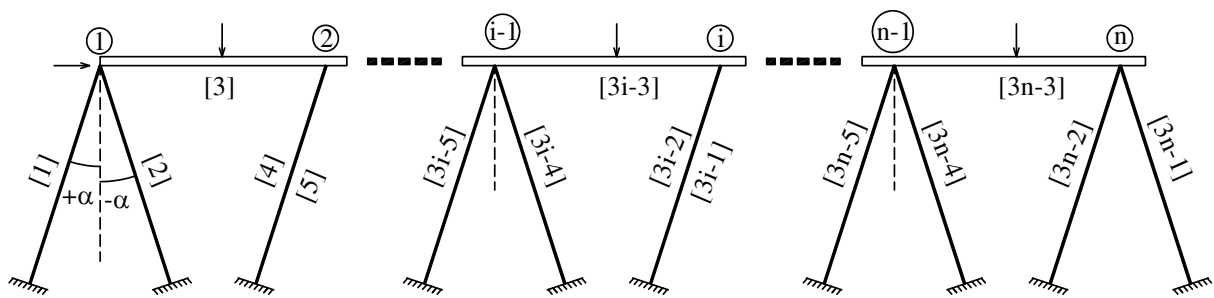
Sau khi thay thế các cọc thực bằng cọc tương đương thì CTB thực được quy về khung phẳng với trục tương đương và đây là một hệ siêu động (hình 1b). Số bậc siêu động (nếu chấp nhận một số giả định nêu trong Cơ học kết cấu):

$$n_{sd} = 2n + 1 \quad (22)$$

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị đối với trường hợp này là hệ xác định động (hình 1c).

## 2. Đánh số nút và phần tử:

Cách đánh số thứ tự của nút và phần tử kết cấu được trình bày một cách tổng quát trên hình 2.



Hình 2: Đánh số nút, số phần tử kết cấu và kí hiệu

## 3. Quy ước dấu dương của các đại lượng:

### (1) Ngoại lực:

- Momen quay thuận chiều kim đồng hồ,
- Lực phân bố đều và lực tập trung thẳng đứng hướng xuống phía dưới,
- Lực nằm ngang: hướng từ phải sang trái.

### (2) Chuyển vị:

- Góc xoay thuận chiều kim đồng hồ,
- Chuyển vị thẳng đứng hướng xuống phía dưới,
- Chuyển vị ngang hướng từ phải sang trái.

### (3) Nội lực:

- Momen uốn làm cho các phần tử thanh quay ngược chiều kim đồng hồ,
- Các lực cắt tạo ra ngẫu lực làm cho phần tử thanh quay thuận chiều kim đồng hồ,
- Lực dọc trục trong phần tử thanh là nén,

- Các phản lực trong các liên kết đặt thêm cùng chiều với chiều của chuyển vị cưỡng bức.

(4) Góc nghiêng  $\alpha$  của cọc được tạo bởi đường thẳng đứng với trục cọc, nếu đường trục cọc lệch trái so với đường thẳng kẻ qua đỉnh cọc.

### 3.2 Ma trận độ cứng

1. Ma trận độ cứng của một cấu kiện dầm ngang:

$$k_d = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}_d \quad (23)$$

Trong đó:  $EI$  và  $l$  = độ cứng chống uốn và chiều dài của nhịp dầm ngang (bộ).

2. Ma trận độ cứng của một cấu kiện cọc

$$k_C = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L_U} & \frac{2EI}{L_U} & 0 \\ \frac{2EI}{L_U} & \frac{4EI}{L_U} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{L_N} \end{bmatrix}_C \quad (24)$$

Ở đây:  $EF$ ,  $EI$ ,  $L_N$  và  $L_U$  = độ cứng chống nén và chống uốn và các chiều dài tính toán tương ứng của cọc.

3. Ma trận cứng của tất cả các bộ phận kết cấu: gồm  $(3n-1)$  ma trận độ cứng của các cấu kiện dầm ngang và cọc, được xếp nối tiếp nhau trên đường chéo chính theo thứ tự đánh số phần tử như ở hình 2.

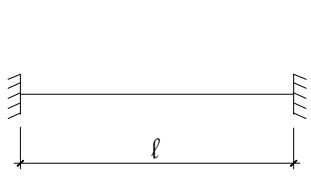
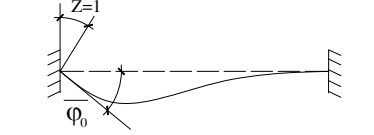
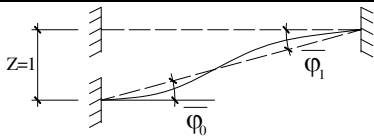


### 3.3 Ma trận biến dạng

#### 1. Ma trận biến dạng của cấu kiện dầm ngang (Bảng 1)

$$a_d = \{\bar{\varphi}_0 \quad \bar{\varphi}_1\}_d \quad (26)$$

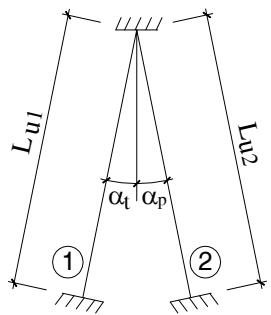
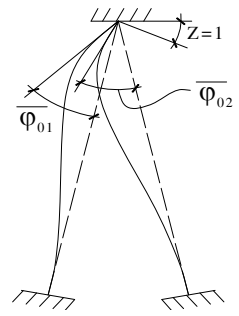
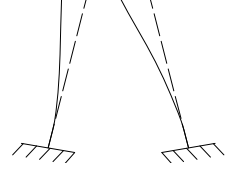
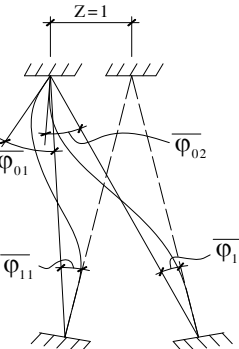
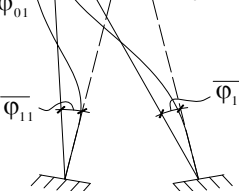
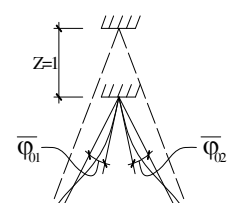

Bảng 1: Ma trận biến dạng của cấu kiện dầm ngang:

Sơ đồ cấu kiện	Sơ đồ nguyên nhân	Góc xoay	
		$\bar{\varphi}_0 = 1$	$\bar{\varphi}_1 = 0$
		$\bar{\varphi}_0 = \frac{1}{1}$	$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{1}$

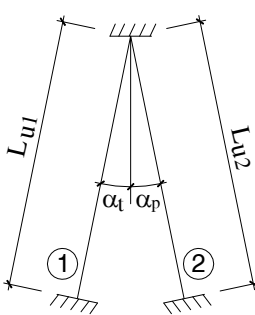
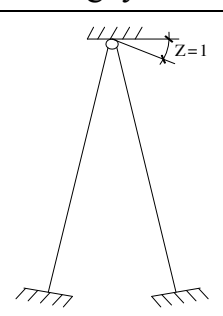
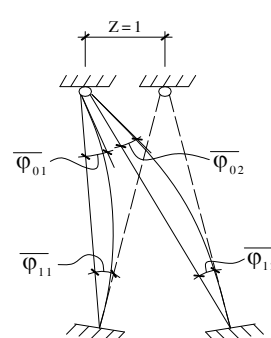
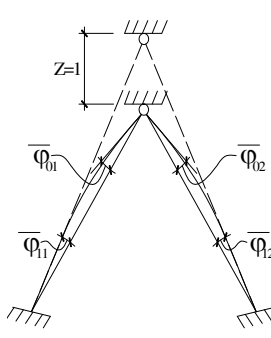
#### 2. Ma trận biến dạng của cấu kiện cọc (bảng 2 và bảng 3)

$$a_c = \{\bar{\varphi}_0 \quad \bar{\varphi}_1 \quad \bar{\delta}_1\}_c \quad (27)$$

Bảng 2: Ma trận biến dạng của cấu kiện cọc, đối với đầu cọc liên kết ngàm với bệ:

Sơ đồ cấu kiện	Sơ đồ nguyên nhân	$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\delta}_1$
		$\bar{\varphi}_{01} = 1$	$\bar{\varphi}_{11} = 0$	$\bar{\delta}_{11} = 0$
		$\bar{\varphi}_{02} = 1$	$\bar{\varphi}_{12} = 0$	$\bar{\delta}_{12} = 0$
		$\bar{\varphi}_{01} = \frac{\cos \alpha_t}{L_{u1}}$	$\bar{\varphi}_{11} = \frac{\cos \alpha_t}{L_{u1}}$	$\bar{\delta}_{11} = \sin \alpha_t$
		$\bar{\varphi}_{02} = \frac{\cos \alpha_p}{L_{u2}}$	$\bar{\varphi}_{12} = \frac{\cos \alpha_p}{L_{u2}}$	$\bar{\delta}_{12} = -\sin \alpha_p$
		$\bar{\varphi}_{01} = -\frac{\sin \alpha_t}{L_{u1}}$	$\bar{\varphi}_{11} = -\frac{\sin \alpha_t}{L_{u1}}$	$\bar{\delta}_{11} = \cos \alpha_t$
		$\bar{\varphi}_{02} = \frac{\sin \alpha_p}{L_{u2}}$	$\bar{\varphi}_{12} = \frac{\sin \alpha_p}{L_{u2}}$	$\bar{\delta}_{12} = \cos \alpha_p$

Bảng 3: Ma trận biến dạng của cấu kiện cọc, đối với đầu cọc liên kết khớp với bệ:

Sơ đồ cấu kiện	Sơ đồ nguyên nhân	$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\delta}_1$
		$\bar{\varphi}_{01} = 0$	$\bar{\varphi}_{11} = 0$	$\bar{\delta}_{11} = 0$
		$\bar{\varphi}_{02} = 0$	$\bar{\varphi}_{12} = 0$	$\bar{\delta}_{12} = 0$
		$\bar{\varphi}_{01} = -\frac{\cos \alpha_t}{2L_{u1}}$	$\bar{\varphi}_{11} = \frac{\cos \alpha_t}{L_{u1}}$	$\bar{\delta}_{11} = \sin \alpha_t$
		$\bar{\varphi}_{02} = -\frac{\cos \alpha_p}{2L_{u2}}$	$\bar{\varphi}_{12} = \frac{\cos \alpha_p}{L_{u2}}$	$\bar{\delta}_{12} = -\sin \alpha_p$
		$\bar{\varphi}_{01} = \frac{\sin \alpha_t}{2L_{u1}}$	$\bar{\varphi}_{11} = -\frac{\sin \alpha_t}{L_{u1}}$	$\bar{\delta}_{11} = \cos \alpha_t$
		$\bar{\varphi}_{02} = -\frac{\sin \alpha_p}{2L_{u2}}$	$\bar{\varphi}_{12} = \frac{\sin \alpha_p}{L_{u2}}$	$\bar{\delta}_{12} = \cos \alpha_p$

### 3. Ma trận biến dạng của toàn khung ngang

Ma trận a có cấu trúc như công thức (10), là một ma trận chữ nhật, cấp  $[(8n-2) \times (2n+1)]$ , được lập theo cách sắp xếp ở bảng 4.

Bảng 4: Cấu trúc ma trận a của khung có n nút

Các ản chuyển vị xoay						Các ản chuyển vị thẳng					Ản chuyển vị ngang	Chuyển vị
$Z_1$	$Z_2$	...	$Z_i$	...	$Z_n$	$Z_{n+1}$	...	$Z_{n+i}$	...	$Z_{2n}$	$Z_{2n+1}$	Cấu kiện
a=												1
												2
												...
												$3i - 3$
												$3i - 2$
												$3i - 1$
												...
												$3n - 3$
												$3n - 2$
												$3n - 1$

3.4 Ma trận phản lực trong các liên kết đặt thêm do tải trọng ngoài gây ra trên hệ cơ bản,  $R_{op}$

1. Trên kết cấu chỉ có một trường hợp đặt tải.

Trước hết phải vẽ biểu đồ momen và lực cắt do tải trọng ngoài gây ra trên hệ cơ bản, sau đó tìm phản lực trong từng loại liên kết đặt thêm giống như phương pháp chuyển vị.

- (1) Phản lực momen  $R_{op}$  trong các liên kết chống xoay: tách nút có liên kết chống xoay  $i$  và dùng điều kiện cân bằng momen để tìm  $R_{opi}$ .
- (2) Phản lực lực  $R_{op}$  trong các liên kết chống chuyển vị thẳng theo phương thẳng đứng: tách nút có liên kết chống chuyển vị thẳng đứng  $i$  và dùng điều kiện cân bằng lực theo phương thẳng đứng để tìm  $R_{opi}$ .
- (3) Phản lực lực  $R_{op}$  trong liên kết chống chuyển vị thẳng nằm ngang của toàn bộ khung ngang: cắt vòng qua tất cả các liên kết của khung ngang và dùng điều kiện cân bằng của lực theo phương ngang để tìm  $R_{opi}$ .

2. Trên kết cấu chịu đồng thời các trường hợp đặt lực khác nhau: Giả sử có  $m$  trường hợp thì ma trận  $R_{opi}$  sẽ có cấp  $[(2n+1) \times m]$  (xem bảng 5).

3. Ghi chú:

- (1)  $R_{op}$  chính là số hạng tự do trong hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị.
- (2) Nếu một lực tập trung thẳng đứng tác dụng đúng vào nút thì tải này được xét khi cân bằng chính nút ấy để tính  $R_{op}$ .

Bảng 5: Cấu trúc ma trận  $R_{op}$  với m trường hợp đặt tải

	1	2	...	m	Trường hợp đặt tải	
					Liên kết đặt	
$R_{op} =$					$Z_1$	Chống chuyển vị xoay
					$Z_2$	
					...	
					$Z_n$	
					$Z_{n+1}$	Chống chuyển vị thẳng đứng
					...	
					$Z_{n+i}$	
					...	
					$Z_{2n}$	Chống chuyển vị ngang
					$Z_{2n+1}$	

3.5 Ma trận nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản,  $S_{op}$ .

1. Dựa vào công thức tính momen uốn tại 2 đầu nút của cấu kiện mẫu (ví dụ bảng 14-1 [1]) chịu tải trọng ngoài để tìm các phần tử của ma trận  $S_{op}$ .
2. Nếu có m trường hợp đặt lực thì ma trận  $S_{op}$  có cấp  $[(8n-2) \times m]$  với cấu trúc như bảng 6.

Bảng 6: Cấu trúc ma trận  $S_{op}$  với m trường hợp đặt tải

	1	2	...	m	Trường hợp đặt lực	
					Cấu kiện	
$S_{op} =$					$T_r$	1
					$P_h$	
					$T_r$	2
					$P_h$	
					$T_r$	...
					$P_h$	
					$T_r$	$3i - 3$
					$P_h$	
					$T_r$	$3i - 2$
					$P_h$	
					$T_r$	$3i - 1$
					$P_h$	
					$T_r$	...
					$P_h$	
					$T_r$	$3n - 3$
					$P_h$	
					$T_r$	$3n - 2$
					$P_h$	
					$T_r$	$3n - 1$
					$P_h$	

3. Ghi chú:

- (1) Ma trận  $S_{op}$  chỉ chứa các phần tử khác không ứng với các cấu kiện dầm ngang.
- (2) Giá trị các phần tử trong ma trận này là momen.

3.6 Trình tự tính toán

1. Lập các ma trận xuất phát.

- Ma trận độ cứng, k
- Ma trận biến dạng, a
- Ma trận phản lực,  $R_{op}$
- Ma trận nội lực,  $S_{op}$

2. Chuyển trí ma trận a thành  $a^T$ , có cấp  $[(2n+1) \times (8n-2)]$

3. Tính ma trận  $d=ka$ , có cấp  $[(8n-2) \times (2n+1)]$

4. Tính ma trận độ cứng  $K=a^T d$ , có cấp  $[(2n+1) \times (2n+1)]$

5. Nghịch đảo ma trận độ cứng  $K$  thành  $K^{-1}$ , kiểm tra điều kiện:  $K \times K^{-1} = E$
6. Tìm ma trận nghiệm các chuyển vị  $Z$

$$Z = -K^{-1} R_{op}$$

7. Tìm ma trận nội lực do chuyển vị gây ra  $S_z$ , có cấp  $[8n-2) \times m]$

$$S_z = dZ \tag{28}$$

Kiểm tra kết quả tính  $S_z$  bằng biểu thức:

$$-a^T S_z = R_{op} \tag{29}$$

8. Tìm ma trận nội lực

$$S = S_z + S_{op} \tag{30}$$

Nội lực cho trong (30) bao gồm:

- Momen uốn tại 2 đầu của cấu kiện dầm ngang và cấu kiện cọc,
- Lực dọc trong các cọc.

9. Tính toán các nội lực còn lại trong kết cấu

(1) Lực cắt trong dầm ngang tại tiết diện có nút  $i$ :

$$\begin{bmatrix} Q_{i,i-1} \\ Q_{i,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_{di}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{i,i-1} \\ M_{i,i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{i,i-1}^0 \\ Q_{i,i+1}^0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Ở đây:

$i, i-1$  và  $i, i+1$  = các chỉ số dưới, ký hiệu tiết diện phía trái và phải của  $i$

$Q^0$  là lực cắt do tải trọng ngoài gây ra khi cấu kiện là dầm đơn giản

(2) Lực cắt tại 2 tiết diện đầu mút của cấu kiện cọc tại nút  $i$ :

$$\begin{bmatrix} Q_i^d \\ Q_i^c \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{Ui}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i^d \\ M_i^c \end{bmatrix} \tag{32}$$

Ở đây:

$d$  và  $c$  = các chỉ số trên, ký hiệu đầu và chân cọc.

(3) Lực dọc trục trong dầm ngang: dựa trên kết quả tính lực cắt tại đầu cọc và bắt đầu từ nút có ngoại lực dọc trực tác dụng.

10. Kiểm tra ba điều kiện cân bằng tĩnh của từng nút.
11. Tính toán nội lực tại một số tiết diện bất kỳ trên dầm ngang. Vẽ biểu đồ các nội lực: momen uốn, lực cắt và lực dọc trong kết cấu.

## 4. Ví dụ

### 4.1 Số liệu xuất phát

Kết cấu công trình bên trên nền cọc ống thép đường kính ngoài 0,6m, đóng trong nền đất sét đồng nhất có các tham số ghi trên hình 3a.

- Các thông số của dầm ngang:

$$b \times h = 0,8 \times 1,2\text{m}$$

$$EI = 3\,340\,800 \text{ KNm}^2$$

- Các thông số về cọc:

$$d = 0,6\text{m}$$

$$t = 16\text{mm}$$

$$EI = 263\,004,735 \text{ KNm}^2$$

$$EF = 8\,953,28\text{kN}$$

Cọc	1	2	3	4
$P_u$ (kN)	4258,11	4258,11	4246,05	4246,05
$P_a$ (kN)	3041,51	3041,51	3032,89	3032,89
$L_N$ (m)	26,19	26,19	26,23	26,23
$L_u$ (m)	15,60	15,60	15,77	15,77

- Các tính chất của nền đất sét đồng nhất:

$$I_L = 0,3$$

$$k = 6\,200\text{kN/m}^4$$

Yêu cầu tính toán chuyển vị - nội lực của CTB đã cho bằng phương pháp ma trận độ cứng (đầu cọc ngàm cứng vào đáy bệ).

### 4.2 Giải

1. Sơ đồ tính toán: hình 3b và 3c.

2. Các ma trận xuất phát:



(1) Ma trận độ cứng của tất cả các bộ phận kết cấu: k

k=  
(16x16)

67431.87	33715.935	0													
33715.935	67431.87	0													
0	0	235378.342													
			3340800	1670400											
			1670400	3340800											
					67431.87	33715.935	0								
					33715.935	67431.87	0								
					0	0	235378.342								
								2227200	1113600						
								1113600	2227200						
										66730.918	33365.459	0			
										33365.459	66730.918	0			
										0	0	235019.396			
													66730.918	33365.459	0
													33365.459	66730.918	0
													0	0	235019.396

(2) Ma trận biến dạng của tất cả các bộ phận kết cấu: a

	Chuyển vị xoay			Chuyển vị thẳng			Chuyển vị ngang	Chuyển vị
	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	b <sub>I</sub>	b <sub>II</sub>	b <sub>III</sub>	a	Cấu kiện
a= (16x7)	1	0	0	0	0	0	1/15.6	1
	0	0	0	0	0	0	1/15.6	
	0	0	0	1	0	0	0	2
	1	0	0	1/4	-1/4	0	0	
	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	3
	0	1	0	0	0	0	1/15.6	
	0	0	0	0	0	0	1/15.6	4
	0	0	0	0	1	0	0	
	0	1	0	0	1/6	-1/6	0	5
	0	0	1	0	1/6	-1/6	0	
	0	0	1	0	0	-0.01043	0.06257	6
	0	0	0	0	0	-0.01043	0.06257	
	0	0	0	0	0	0.98639	0.16440	6
	0	0	1	0	0	0.01043	0.06257	
	0	0	0	0	0	0.01043	0.06257	6
	0	0	0	0	0	0.98639	-0.16440	

(3) Ma trận phản lực trong các liên kết đặt thêm do tải trọng bên ngoài gây ra trên hệ cơ bản, R<sub>op</sub>:

$$R_{op} = [133,33 \quad -333,333 \quad 0 \quad -800 \quad -2000 \quad -2500 \quad 150]$$

(4) Ma trận nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản, S<sub>op</sub>:

$$S_{op} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 266,667 \quad 266,667 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -600 \quad 600 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

#### 4.3 Kết quả chủ yếu của các phép tính ma trận

(1) Ma trận độ cứng của kết cấu, K:

$$K = \begin{bmatrix} 3408200 & 1670400 & 0 & 1252800 & -1252800 & 0 & 6484 \\ 1670400 & 5635400 & 1113600 & 1252800 & -696000 & -556800 & 6484 \\ 0 & 1113600 & 2360700 & 0 & 556800 & -556800 & 12526 \\ 1252800 & 1252800 & 0 & 861780 & -626400 & 0 & 0 \\ -1252800 & -696000 & 556800 & -626400 & 1047400 & -185600 & 0 \\ 0 & -556800 & -556800 & 0 & -185600 & 642970 & 0 \\ 6484 & 6484 & 12526 & 0 & 0 & 0 & 15934 \end{bmatrix}$$

(2) Ma trận chuyển vị, Z:

$$Z = [0,00076 \quad 0,000436 \quad -0,000501 \quad 0,004235 \quad 0,006942 \quad 0,005836 \quad -0,009507]$$

(3) Ma trận nội lực, S:

Ma trận Sz	Ma trận S	Nội lực – cấu kiện
$Sz = \begin{pmatrix} -10,377 \\ -36,009 \\ 996,760 \\ -122,960 \\ -664,080 \\ -32,221 \\ -46,931 \\ 1634,000 \\ 1029,600 \\ -14,060 \\ -99,063 \\ -82,340 \\ 985,590 \\ -86,877 \\ -70,163 \\ 1720,200 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} -10,377 \\ -36,009 \\ 996,760 \\ -389,620 \\ -397,420 \\ -32,221 \\ -46,931 \\ 1634,000 \\ 429,640 \\ 585,940 \\ -99,063 \\ -82,349 \\ 985,590 \\ -86,877 \\ -70,163 \\ 1720,200 \end{pmatrix}$	$M_{1-8}$ $M_{8-1}$ $N_1$ $M_{1-2}$ $M_{2-1}$ $M_{2-7}$ $M_{7-2}$ $N_3$ $M_{2-3}$ $M_{3-2}$ $M_{3-6}$ $M_{6-3}$ $N_5$ $M_{3-5}$ $M_{5-3}$ $N_6$

## 4.4 Tổng hợp kết quả

(1) Chuyển vị

Bảng 7: Chuyển vị các nút của kết cấu

Chuyển vị	Nút số		
	1	2	3
1. Xoay (rad.)	0,000760	0,000436	-0,000501
2. Thăng đứng (mm)	4,23	6,94	5,84
3. Nằm ngang (mm)	-9,51	-9,51	-9,51

(2) Nội lực tại hai đầu các cấu kiện

Bảng 8: Nội lực trong cọc và dầm ngang

Nội lực	Cấu kiện cọc				Cấu kiện dầm ngang			
	Thăng đứng		Xiên					
	$\frac{1-8}{8-1}$	$\frac{2-7}{7-2}$	$\frac{3-6}{6-3}$	$\frac{3-5}{5-3}$	$\frac{0-1}{1-0}$	$\frac{1-2}{2-1}$	$\frac{2-3}{3-2}$	$\frac{3-4}{4-3}$
Momen (kNm)	$\frac{-10,377}{-36,009}$	$\frac{-32,221}{-46,931}$	$\frac{-99,063}{-82,349}$	$\frac{-86,877}{-70,163}$	$\frac{0}{400}$	$\frac{-389,620}{-397,420}$	$\frac{429,640}{585,940}$	$\frac{-400}{0}$
Lực cắt (kN)	$\frac{2,973}{-}$	$\frac{5,074}{-}$	$\frac{11,504}{-}$	$\frac{9,958}{-}$	$\frac{-400}{-}$	$\frac{596,760}{-203,240}$	$\frac{430,737}{-769,263}$	$\frac{400}{-}$
Lực dọc (kN)	$\frac{147,027}{-}$	$\frac{1634,0}{-}$	$\frac{958,59}{-}$	$\frac{1720,2}{-}$	$\frac{150}{-}$	$\frac{147,027}{-}$	$\frac{141,027}{-}$	$\frac{0}{-}$

Dựa vào nội lực hai đầu cầu kiện (Bảng 8) và ngoại lực, tính được nội lực tại tiết diện bất kỳ và vẽ biểu đồ nội lực trong kết cấu.

## 5. Kết luận

5.1 Khởi đầu của việc tính toán CTB bệ cọc cao mềm bằng phương pháp Ma trận độ cứng là kết quả của Đồ án tốt nghiệp kỹ sư Xây dựng (dạng 50% khối lượng là chuyên đề) năm 1988 do sinh viên Lâm Hoan Cường (khoa Công trình thủy – Trường Đại học Bách Khoa TP HCM) thực hiện dưới sự hướng dẫn của tác giả bài viết này.

Tiếp đó là nhiều nghiên cứu hoàn thiện và sau cùng đã được chúng tôi đưa vào bài giảng môn học: “Thiết kế công trình bến” ở một số trường Đại học [11, 12].

Trải qua nhiều năm giảng dạy - học tập cho thấy, Ma trận độ cứng là một phương pháp phân tích chuyển vị - nội lực của kết cấu CTB trên nền cọc thể hiện được ba đặc tính sau:

Về mặt cơ học: đã diễn đạt đầy đủ và rõ ràng ý tưởng phân tích kết cấu theo mô hình chuyển vị.

Về mặt toán học: đã diễn đạt chính xác và súc tích lời giải bằng ngôn ngữ ma trận.

Về mặt thực hành: đã chỉ ra từng bước tính toán kèm theo việc kiểm soát chặt chẽ kết quả sau những bước trọng yếu.

5.2 Phương pháp ma trận độ cứng cho phép phân tích trạng thái ứng suất – biến dạng thuộc nhiều lớp bài toán thiết kế CTB bệ cọc cao mềm như:

- (1) Kết cấu và đất nền làm việc trong giai đoạn đàn hồi cũng như đàn hồi – dẻo,
- (2) Đánh giá ảnh hưởng của mức độ ngàm đầu cọc vào bộ đến trạng thái chuyển vị - nội lực của CTB.
- (3) Xuất phát từ sự biến đổi nhiệt độ của môi trường có thể xác định chiều dài một phân đoạn CTB.
- (4) Xây dựng đường ảnh hưởng các nội lực trong CTB khi kết cấu chịu tải di động.
- (5) Có thể giải các bài toán cọc chịu lực ngang nếu biến đổi chúng thành sơ đồ khung phẳng với các trụ là thanh dầm.

Cũng như các phương pháp Antonov, Xcuratov, v.v... Ma trận độ cứng triển khai tính toán CTB bệ cọc cao mềm trên sơ đồ khung tương đương, nên phải chú ý hai điều kiện sau đây:

1. Biện pháp chiều dài tương đương (chiều dài chịu uốn) của cọc cho kết quả tính toán hoàn toàn trùng với phương pháp chính xác khi các cọc là mềm, còn trong [16] thì khuyến nghị dùng khi  $\bar{L} > 2,5$ .
2. Chuyển vị - nội lực thu được luôn cần phải kiểm tra theo các điều kiện giới hạn được quy định cụ thể ứng với mỗi giá trị chiều dài chịu uốn được dùng.

5.3 Được xây dựng bằng cách ứng dụng trực tiếp trên kiến thức cơ học kết cấu (trình độ đại học), cấu trúc lời giải chặt chẽ và thực hành dễ dàng nên Ma trận độ cứng cũng là một phương pháp có tính giáo khoa, nếu được dùng vào việc giảng dạy nhất định sẽ mang lại hiệu ích rõ rệt.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lều Thọ Trình: Cơ học kết cấu, T.III – Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp Hà Nội, 1986.
- [2] Lều Thọ Trình, Lều Mộc Lan: Cách sử dụng ngôn ngữ Ma trận trong lý thuyết tính hệ thanh. Nhà xuất bản Xây Dựng, Hà Nội, 2007.
- [3] A.M.Maxlennikov: Tính toán kết cấu xây dựng bằng phương pháp số - Leningrad, 1987 (Tiếng Nga).
- [4] X.P.Antonov, V.P.Meierxon – Tính toán công trình bệ cọc cao. “Vận tải biển”, 1957 (Tiếng Nga).
- [5] N.N.Djunkovxki và nh.ng.kh: Cảng và công trình cảng, tập II. Nhà xuất bản Xây Dựng, Matxcova, 1967 (Tiếng Nga).
- [6] Dương Quang Thành: “Tính toán móng cọc đài mềm theo phương pháp chuyển chuyển vị”. Tập san Khoa học – Kỹ thuật, No.3, 1968.
- [7] Lê Đức Thắng: “Tính toán móng cọc đài mềm theo phương pháp chính xác”. Tập công trình nghiên cứu về móng cọc, Bộ môn Cơ học đất – Nền móng, Đại học Xây dựng, Hà Nội 1970.
- [8] Đặng Quang Liên: “Hai mươi năm thiết kế bệ cọc cao”. Tạp chí Khoa học Kỹ thuật Giao thông vận tải, No.4, 1982, Bộ Giao thông vận tải, Hà Nội, tr.32-40.
- [9] Phan Dũng: “Tính toán bệ cọc cao mềm có xét đến sự tương tác giữa nền đất và nền cọc”. Tạp chí Khoa học Kỹ thuật Giao thông vận tải, No.1, 1982, Bộ Giao thông vận tải, Hà Nội, Tr.11-14.
- [10] Phan Dũng: Tính toán cọc và móng cọc trong xây dựng giao thông. Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà Nội, 1987, 234 trang.
- [11] Phan Dũng: “Một vài phương pháp tính toán cọc và móng cọc”. Báo cáo tại trường Đại học Giao thông đường thủy Matxcova, 8-1991 (Tiếng Nga).

- [12]Phan Dũng: “Thiết kế công trình bến”. Bài giảng cho sinh viên ngành Cảng – Công trình biển, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh, 1992-1993.
- [13]Phan Dũng: “Thiết kế công trình bến”. Bài giảng cho sinh viên ngành Công trình thủy – Thềm lục địa, Khoa Công trình, Phân hiệu Đại học Hàng hải Tp. Hồ Chí Minh 2000-2005.
- [14]Phan Dũng: “Điều kiện giới hạn của các tham số của cọc chịu lực ngang theo 20TCN 21-86 khi phân tích chuyển vị - nội lực móng cọc”. Nội san Khoa học – Giáo dục No.11, 2006, Trường Đại học Dân lập Kỹ thuật Công nghệ Tp.HCM, tr.98-110.
- [15]Phan Dũng: Công trình bến qua các ví dụ. Phân hiệu Đại học Hàng Hải TpHCM, 2000.
- [16]V.X.Kirillov: Nền và móng. Nhà xuất bản Vận tải, Matxcova, 1980 (Tiếng Nga).